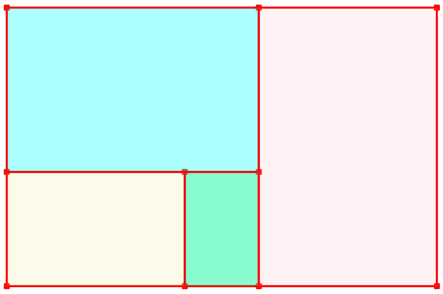
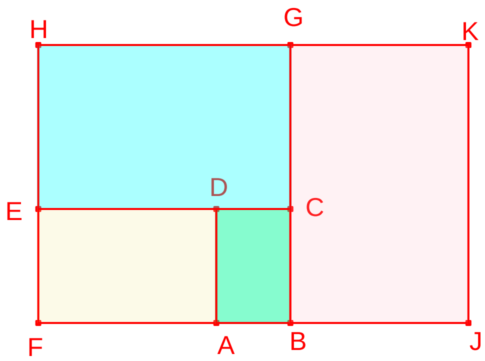
5051.- La figura està formada per cinc rectangles semblants (els quatre ombrejats i el total). Calculeu la proporció entre el llarg i el ample da cada rectangle





Solució:

Siga $\overline{AB} = a, \overline{BC} = ka$

$\overline{AF} = k^2 a$

$\overline{BF} = \overline{CE} = (1 + k^2)a$

$$\overline{CG} = \frac{1 + k^2}{k} a$$

$$\overline{BG} = \left(k + \frac{1 + k^2}{k}\right) a = \frac{2k^2 + 1}{k} a$$

$$\overline{BJ} = \frac{2k^2 + 1}{k^2} a$$

$$\overline{FJ} = \left((1 + k^2) + \frac{2k^2 + 1}{k^2}\right) a = \frac{k^4 + 3k^2 + 1}{k^2} a$$

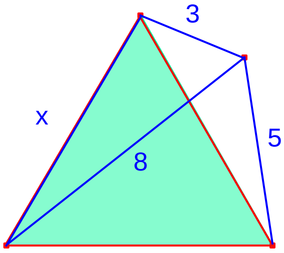
$$k = \frac{\overline{FJ}}{\overline{BG}} = \frac{\frac{k^4 + 3k^2 + 1}{k^2}}{\frac{2k^2 + 1}{k}}$$

$$k^2(2k^2 + 1) = k^4 + 3k^2 + 1$$

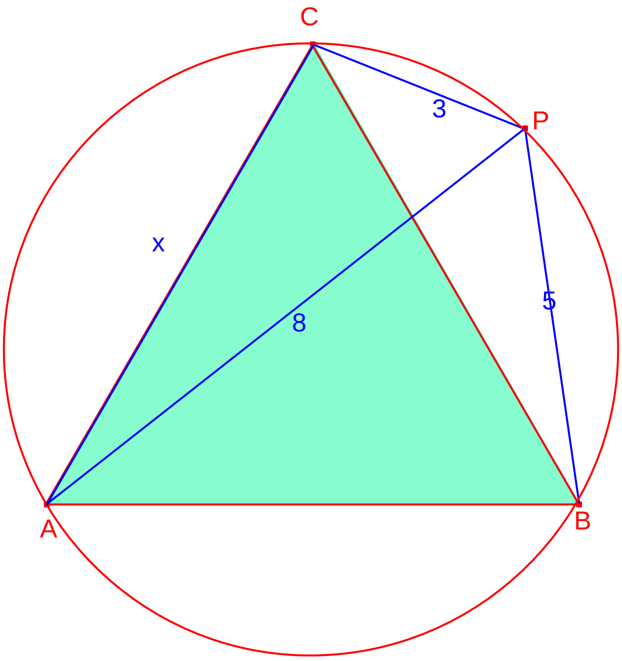
$$k^4 - 2k^2 - 1 = 0$$

$$k = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

5052.- La figura està formada per un triangle equilàter i un punt exterior al triangle des del qual es coneixen les tres distàncies als vèrteexs.
Calculeu la mesura del costat del triangle equilàter.



Solució:



AB=BC=AC=x

AP=8, CP=3, BP=5

5x+3x=8x

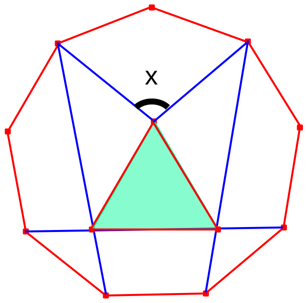
ABPC cíclic

angle CPB=120º

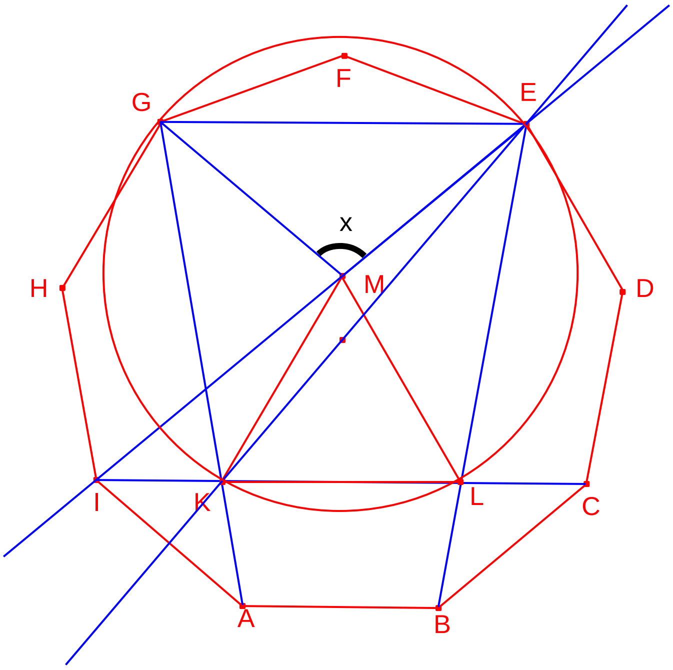
$x^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3(-1/2)$

x=7

4053.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats, tres diagonals i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



KLEG inscriptible

angleKML=60º

angleKEL=30º

M centre circumferència

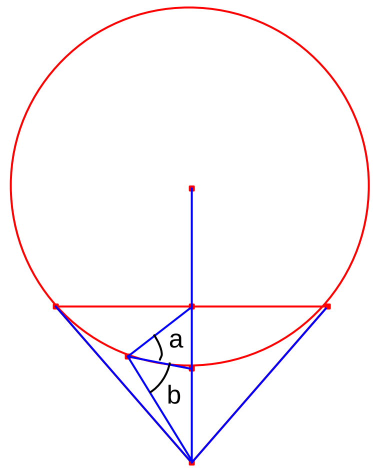
MG=MK

angleKGM=angleKKM=40º

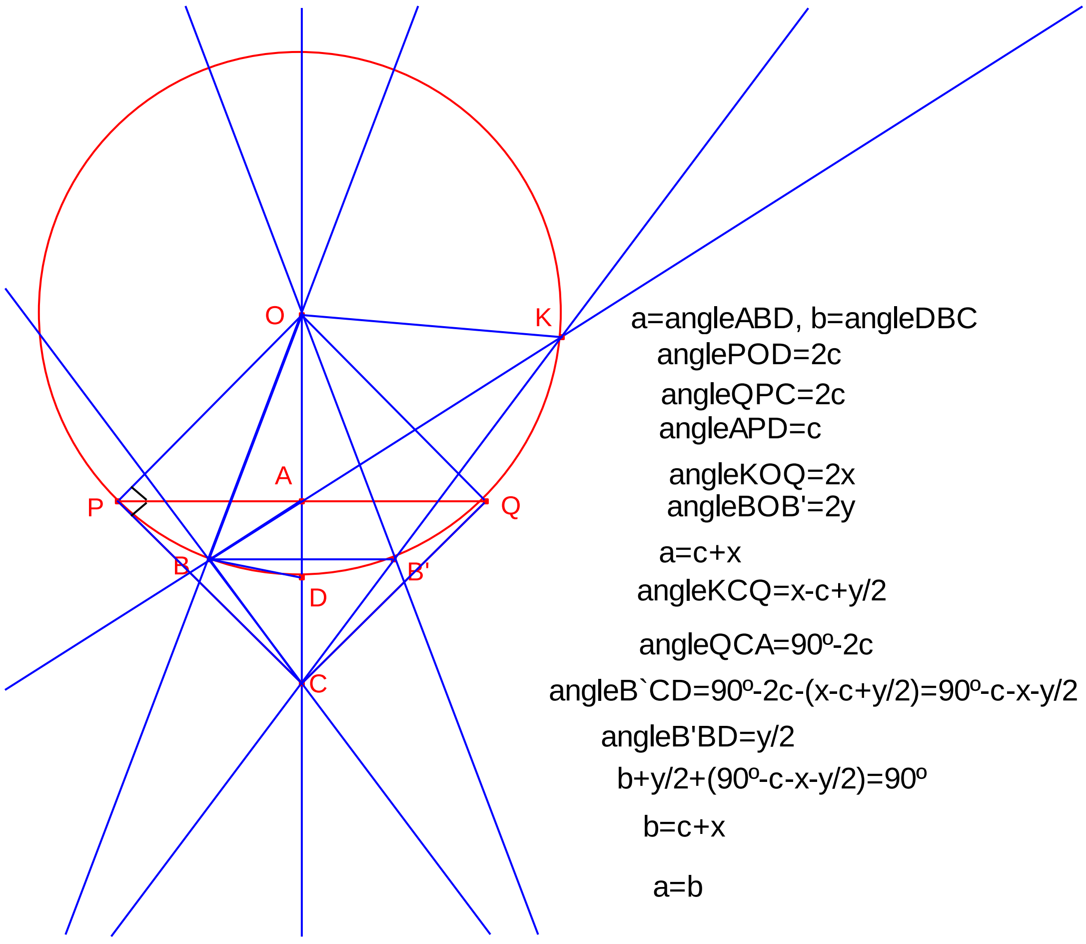
angleKMG=angleLME=100º

angleGME=100º

5054.- La figura està formada per una circumferència i un triangle amb dos costats tangents a la circumferència i un costat connecta els punts de tangència.
Es mostra el segment que uneix el centre de la circumferència fins el vèrtex del triangle.
Demostreu que el angles a, b són iguals.



Solució:



a=angleABD, b=angleDBC

anglePOD=2c

angleQPC=2c

angleAPD=c

angleKOQ=2x

angleBOB'=2y

a=c+x

angleKCQ=x-c+y/2

angleQCA=90º-2c

angleB`CD=90º-2c-(x-c+y/2)=90º-c-x-y/2

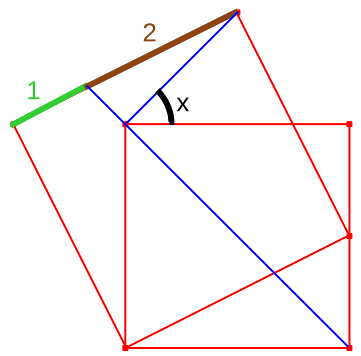
angleB'BD=y/2

b+y/2+(90º-c-x-y/2)=90º

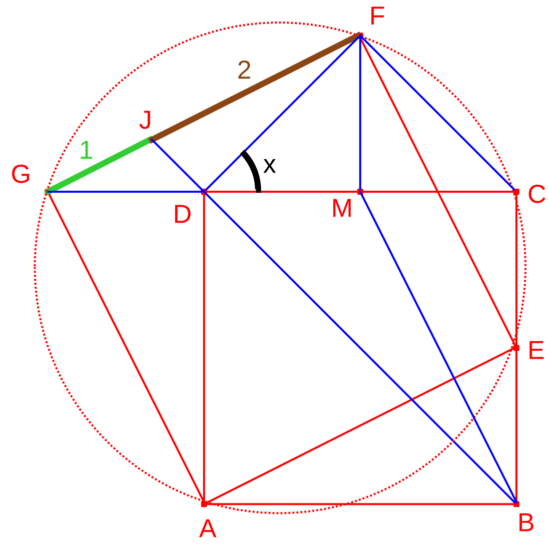
b=c+x

a=b

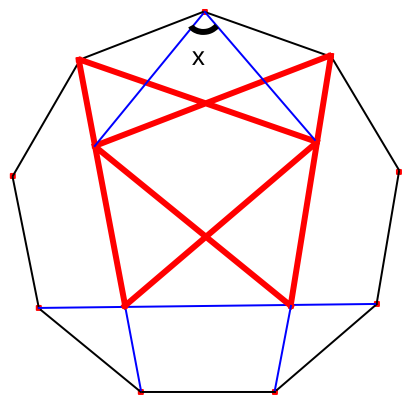
5055.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle x



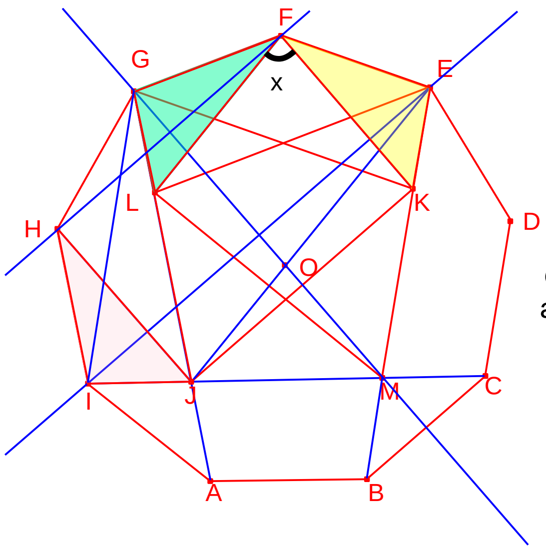
Solució:
$\angle EAB = \angle GAD = \angle FGC = \alpha$
$\angle FEC = \alpha$
El polígon $AECFG$ és inscriptible
Aleshores:
$\angle GCF = \angle GCA = 45°$
Els segments $\overline{BJ}, \overline{CF}$ són paral·lels.
Els triangles $\overset{\Delta}{GDJ}, \overset{\Delta}{GCF}$ son semblants i de raó $1 : 2$
$\overline{CD} = 2 \cdot \overline{GD}$
Siga M la projecció de F sobre $\overline{CD}$.
$\overline{MF} = \overline{MC}$
$\overline{GD} = \overline{MF}$
Aleshores, $\overline{DM} = \overline{CM}$
Per tant, $\overline{DF} = \overline{CF}$
$x = \angle FDM = \angle MCF = 45°$



5056.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i dos triangles equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

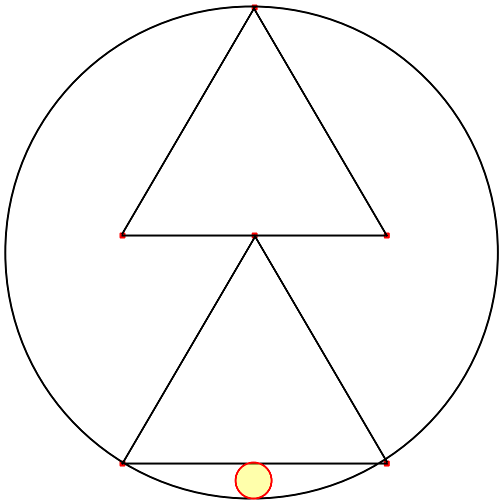


IJ=AJ=CM
JG=GK
GI=GF=FH=JK
Els triangles FGL, HIJ iguals

Gir de 80º de centre O transforma FGL en HIJ
angle LF, HJ=80º

Els triangles FEK, HIJ simètrics respecte GM
angle IE, MG = 90º
FK, JH paral·lels
x=angle LFK = 80º

5057.- La figura està formada per dos triangles equilàters iguals i dues circumferències. Determineu la proporció entre les àrees dels dos cercles.



Solució:

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}$ de costats $\overline{AB} = \overline{DE} = 2$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

$\overline{MF} = 2\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMF}$

$\overline{AF} = \overline{BF} = \sqrt{13}$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA}$ circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és:

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} 2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13}}{4R}$$

Resolent l'equació:

$$R = \frac{13\sqrt{3}}{12}$$

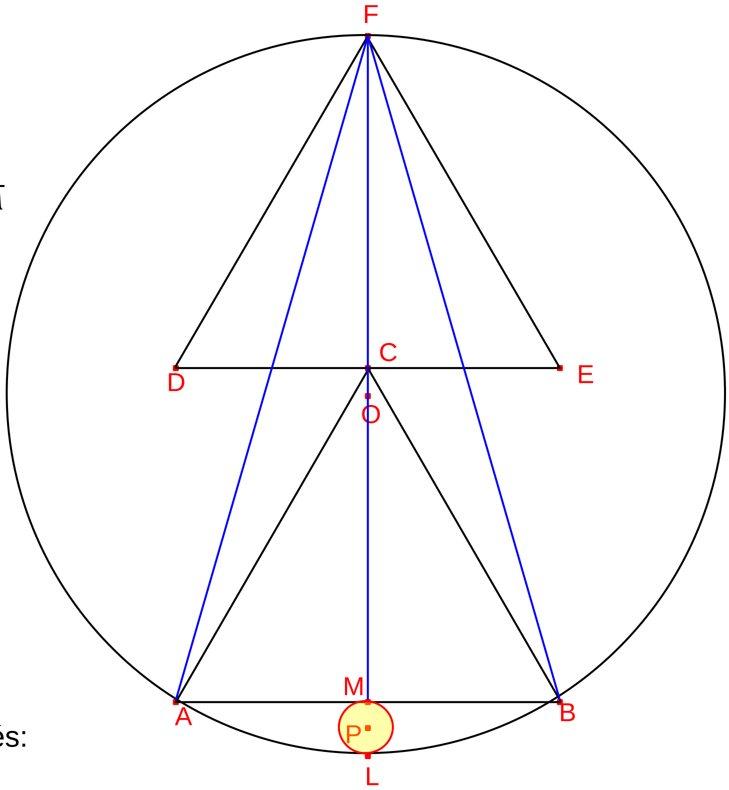
Siga la circumferència de centre P i diàmetre $\overline{ML} = 2s$

$$2s = 2R - \overline{MF} = \frac{13\sqrt{3}}{12} - 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

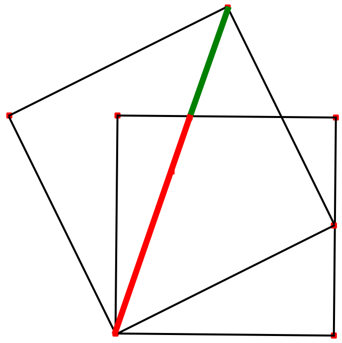
$$s = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

La proporció d'àrees entre els dos cercles és:

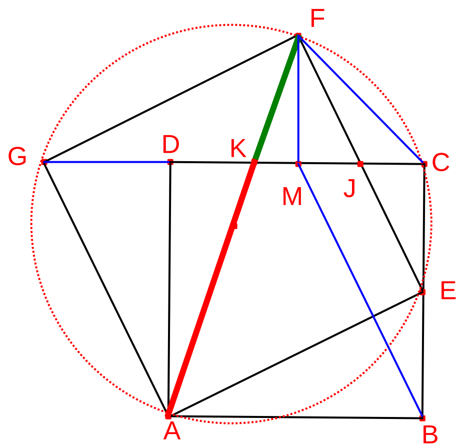
$$\frac{S_s}{S_r} = \left(\frac{s}{R}\right)^2 = \frac{1}{169}$$



5058.- La figura està formada per dos quadrats i el segment roig és igual al doble que el segment verd. Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat gran i l'àrea del quadrat menut.

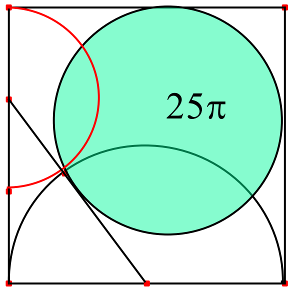


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AE} = d$

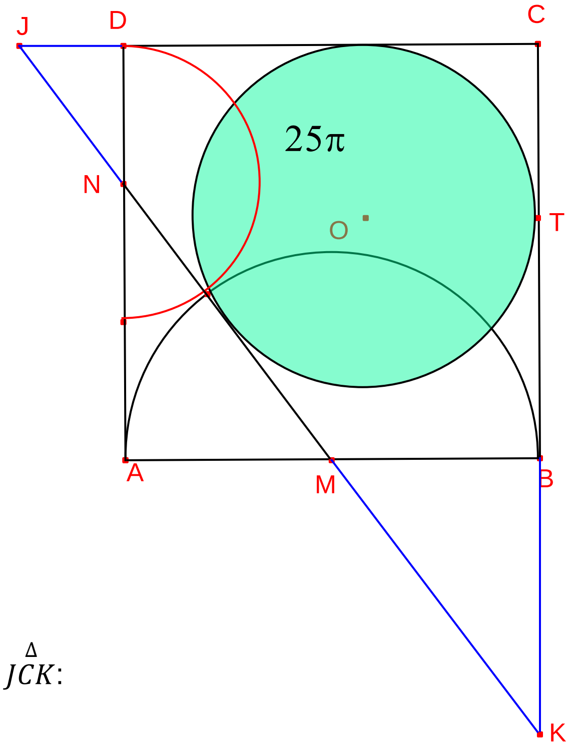


$\angle EAB = \angle GAD = \angle FGC = \alpha$
$\angle FEC = \alpha$
El polígon $AECFG$ és inscriptible
Aleshores:
$\angle GCF = \angle GCA = 45°$
Siga M la projecció de F sobre $\overline{CD}$
$\overline{CM} = \overline{FM}$
Els triangles $\overset{\Delta}{KMF}, \overset{\Delta}{KDA}A$ son semblants i de raó $1 : 2$
Aleshores:
$\overline{FM} = \frac{1}{2}c$
$\overline{CD} = \overline{BE} = CM = \overline{FM}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADG}$
$d^2 = \frac{5}{4}c^2$
La proporció entre les àrees dels quadrats és:
$\frac{S_{AEFG}}{S_{ABCD}} = \frac{d^2}{c^2} = \frac{5}{4}$

5059.- La figura està format per un quadrat, dues semicircumferències i una circumferència d'àrea 25π. Calculeu l'àrea del quadrat.

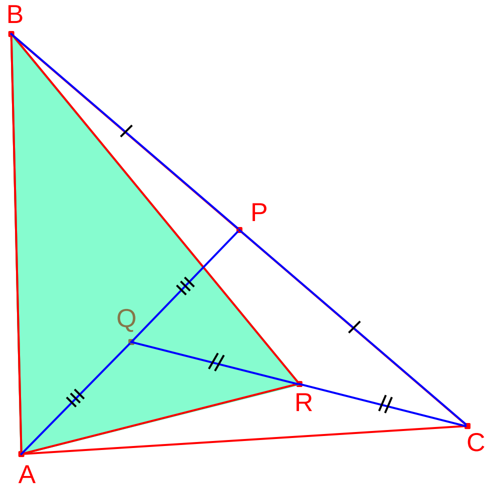


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga la semicircumferència de centre M i diàmetre $\overline{AB}$
Siga la semicircumferència de centre N i radi $\overline{ND} = s$
Siga la circumferència de centre O àrea 25πi radi $r = \overline{OT} = 5$

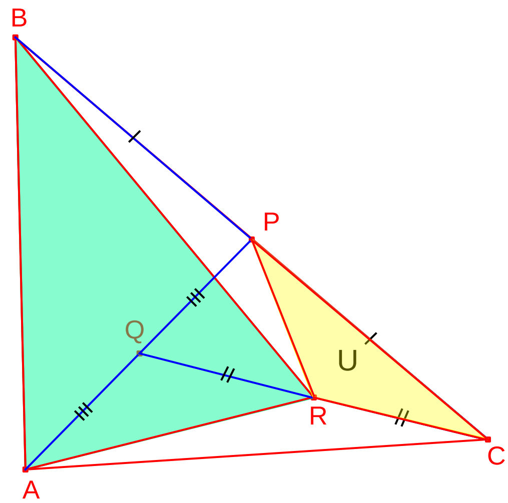


$\overline{AN} = c - s, \overline{MN} = \frac{1}{2}c + s, \overline{AM} = \frac{1}{2}c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NAM}$:
$\left(\frac{1}{2}c + s\right)^2 = \frac{1}{4}c^2 + (c - s)^2$
Resolent l'equació:
$s = \frac{1}{3}c$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NAM}, \overset{\Delta}{NDJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{KB} = \frac{2}{3}c$
$\overline{JC} = \frac{5}{4}c$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NAM}, \overset{\Delta}{KBM}$ són iguals.
$\overline{JC} = \frac{5}{3}c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JCK}$:
$\overline{JK} = \frac{25}{12}c$
La circumferència de centre O està inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JCK}$
El radi és:
$r = 5 = \frac{\frac{5}{4}c + \frac{5}{3}c - \frac{25}{12}c}{2}$
Resolent l'equació:
$c = 12$
L'àrea del quadrat és:
$S_{ABCD} = c^2 = 144$

5060.- En la figura, $\overline{AQ} = \overline{PQ}$, $\overline{CR} = \overline{QR}$, $\overline{CP} = \overline{BP}$
Calculeu la proporció entre les ‘àrees dels triangles
$\overset{\Delta}{BAR}$, $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:



[PRC]=U

[BPR]=U

[BQR]=[BRC]=2U

[QRP]=U

[AQR]=U[

[ARC]=U

[AQB]=2U

[ABC]=8U

[BQC]=4U

[BQR]=(1/2)[AQC]=2U

[BAR]=5U

[BAR] / [ABC] = 5/8