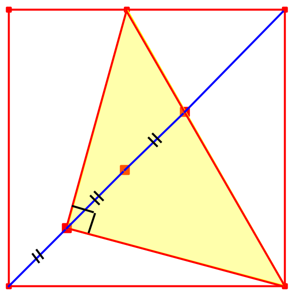
5061.- La figura està formada per un quadrat i un triangle rectangle isòsceles que té el vèrtex recte sobre la diagonal del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BEF}$ de catets $\overline{BF} = \overline{EF} = x$

$\overline{BE} = x\sqrt{2}$

Siga $\overline{AF} = \overline{FG} = \overline{GH} = a$

$\overline{CH} = c\sqrt{2} - 3a$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABH}, \overset{\Delta}{CEH}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{CE} = \frac{c\left(c\sqrt{2} - 3a\right)}{3a}$$

El quadrilàter $BCEF$ és inscriptible.

Aplicant el teorema de Tolomeu:

$$xc + x \cdot \frac{c\left(c\sqrt{2} - 3a\right)}{3a} = x\sqrt{2}\left(c\sqrt{2} - a\right)$$

Simplificant:

$$3a^2 - 3\sqrt{2}ac + c^2 = 0$$

Resolent l'equació:

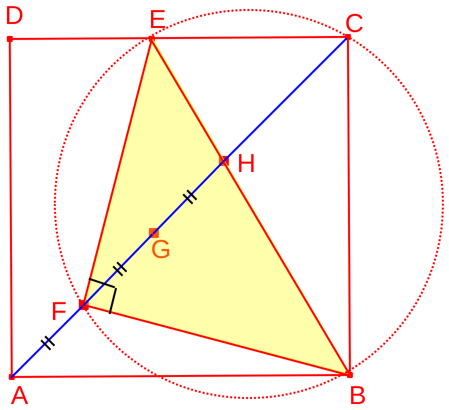
$$a = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:

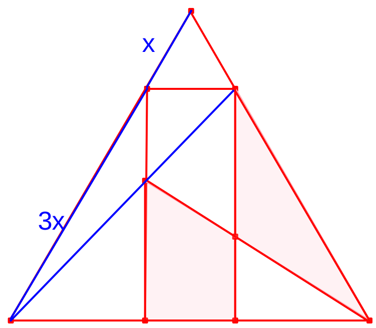
$$x^2 = a^2 + c^2 - ac\sqrt{2} = \frac{2}{3}c^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{BEF}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$



5062.- La figura està formada per un triangle equilàter que conté un rectangle inscrit.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle equilàter.



Solució:

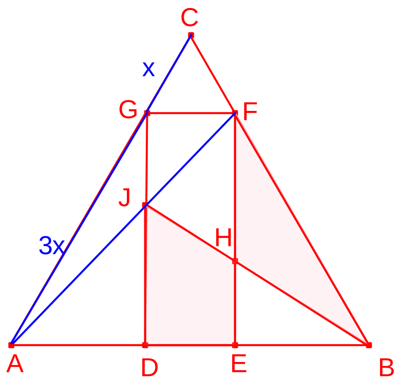
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AC} = 4x$

$\overline{GF} = \overline{DE} = x$

$\overline{AD} = \overline{BE} = \frac{3}{2}x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADG}$

$\overline{DG} = \overline{EF} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADJ}, \overset{\Delta}{AEF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DJ}}{\frac{3}{2}x} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}x}{\frac{5}{2}x}$$

$$\overline{DJ} = \frac{9\sqrt{3}}{10}x$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEH}, \overset{\Delta}{BDJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{HE}}{\frac{3}{2}x} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{10}x}{\frac{5}{2}x}$$

$$\overline{HE} = \frac{27\sqrt{3}}{50}x$$

$$\overline{HF} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{27\sqrt{3}}{50}x = \frac{24\sqrt{3}}{25}x$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = S_{DEHJ} + S_{FHB} = \frac{\overline{DJ} + \overline{HE}}{2}x + \frac{1}{2}\overline{HF} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{18\sqrt{3}}{25}x^2 + \frac{18\sqrt{3}}{25}x^2 = \frac{36\sqrt{3}}{25}x^2$$

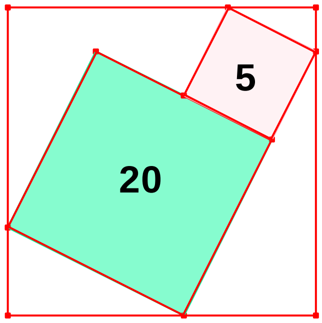
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16x^2 = 4\sqrt{3}x^2$$

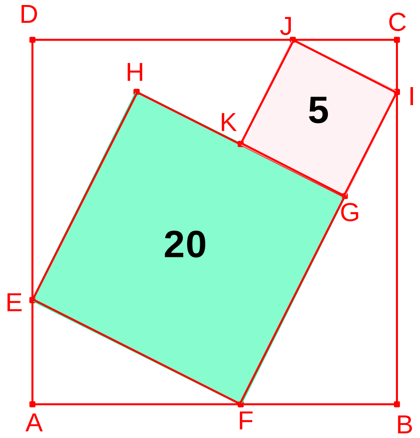
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{36\sqrt{3}}{25}x^2}{4\sqrt{3}x^2} = \frac{9}{25}$$

5053.- La figura està formada per tres quadrats els interiors al quadrat gran tenen àrees 20 i 5 i comparteixen un vèrtex.
Calculeu l’àrea del quadrat exterior



Solució:



AB=c

EF=2·sqrt(5)

GI=sqrt(5)

FI=3·sqrt(5)

AF=x

BI=(3/2)AF=(3/2)x

CI=(1/3)BF=(1/3)(c-x)

c=(c-x)/3+3x/2

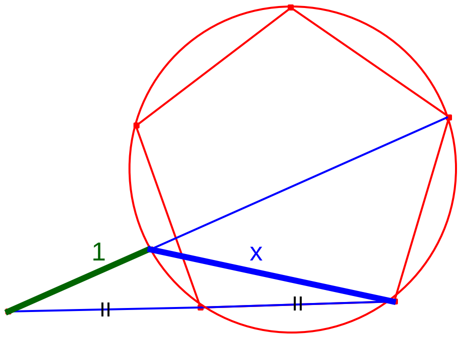
x=(4/7)c

teorema Pitàgores FBI

$45=(c-x)^2+((3/2)x)^2$

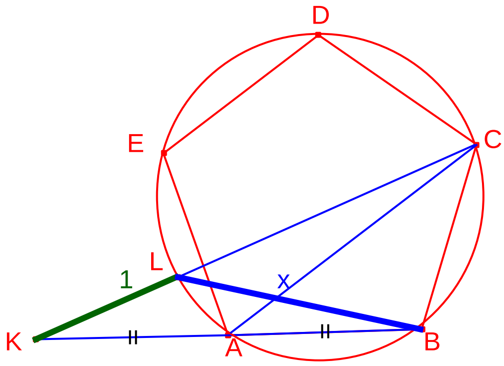
$[ABCD]=c^2=49$

5064.- La figura està formada per un pentàgon regular inscrit en una circumferència.
Calculeu la mesura del segment x

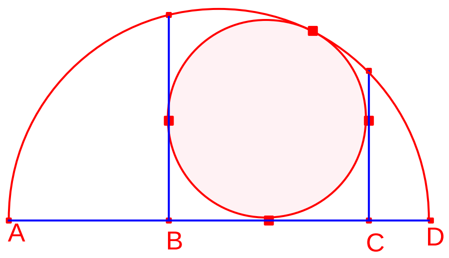


Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga $\overline{KL} = 1, \overline{AK} = a$
$\overline{AC} = a\Phi$
$\angle LCA = \angle ABL$

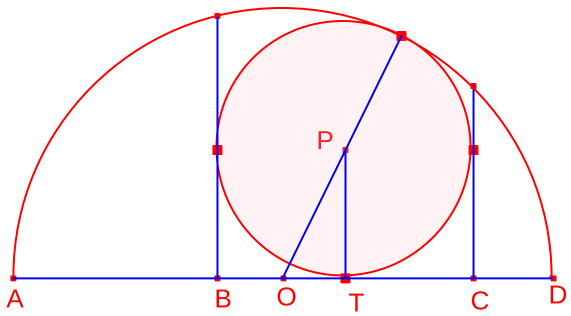
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{KBL}, \overset{\Delta}{KCA}$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{a\Phi} = \frac{1}{a}$$
$x = \Phi$



5065.- La figura està formada per una semicircumferència que conté una circumferència tangent.
Proveu que $\sqrt{AD} = \sqrt{AB} + \sqrt{CD}$



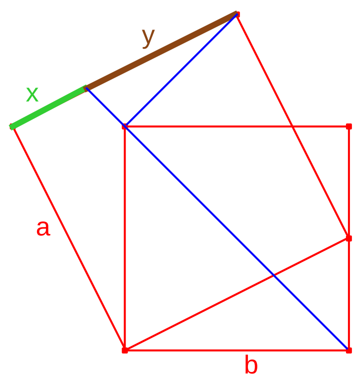
Solució:



Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$
$\overline{BC} = 2r$
Siga $\overline{AB} = a, \overline{CD} = b$
$\overline{AD} = a + b + 2r = 2R$, diàmetre de la semicircumferència de centre O.
$\overline{OP} = R - r = \dfrac{a+b}{2}$
$\overline{OT} = \dfrac{s+b+2r}{2} - (r+b) = \dfrac{a-b}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$
Simplificant:
$ab = r^2$

$\left(\sqrt{AB} + \sqrt{CD}\right)^2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = a + b + 2r$
$\left(\sqrt{AD}\right)^2 = \overline{AD} = a + b + 2r$
Aleshores:
$\sqrt{AD} = \sqrt{AB} + \sqrt{CD}$

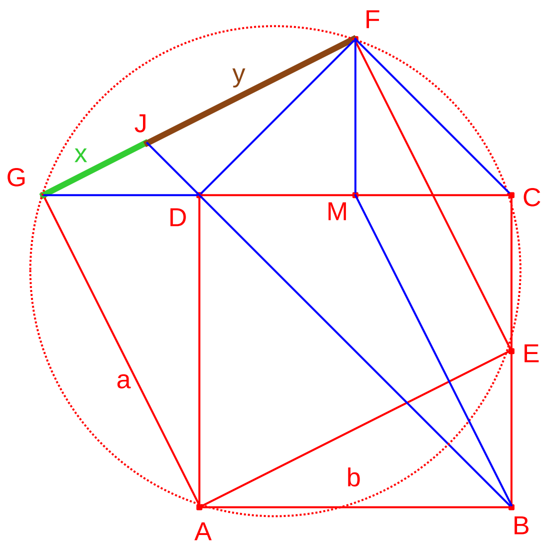
5066.- La figura està formada per dos quadrats de costats a, b.
Calculeu la proporció dels segments $x : y$ en funció de a, b.



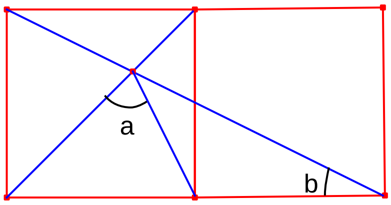
Solució:
$\angle EAB = \angle GAD = \angle FGC = \alpha$
$\angle FEC = \alpha$
El polígon $AECFG$ és inscriptible
Aleshores:
$\angle GCF = \angle GCA = 45°$
Els segments $\overline{BJ}, \overline{CF}$ són paral·lels.
Els triangles $\overset{\Delta}{GDJ}, \overset{\Delta}{GCF}$ son semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{y}{b}$$

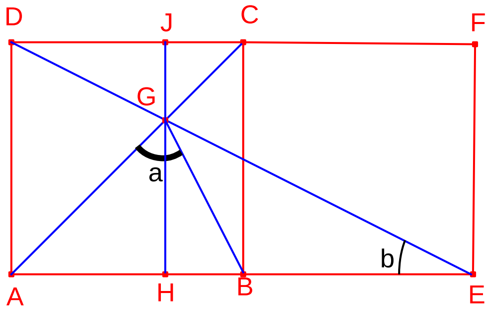
$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$



5067.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la diferencia d'angles $a - b$



Solució:



Siguen els quadrats $ABCD, BEFC$ de costat $\overline{AB} = c$

Els triangles $\overset{\Delta}{CDG}, \overset{\Delta}{AEG}$ són semblants i de raó $1 : 2$

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{GH} = 2 \cdot \overline{GJ}, \overline{AH} = 2 \cdot \overline{CJ}$

Aleshores:

$\overline{AH} = \overline{GH} = 2 \cdot \overline{CJ}, \angle GAH = \angle AGH = 45°$

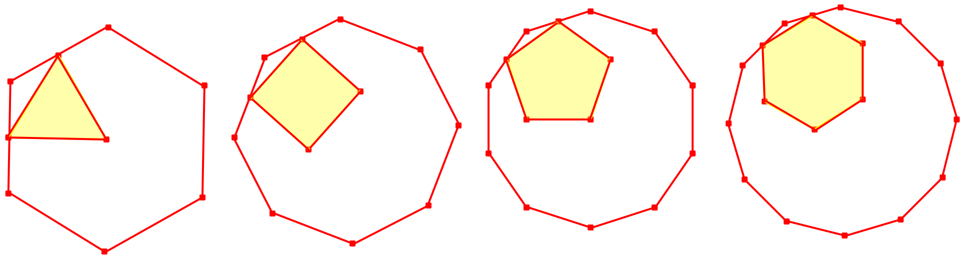
Aplicant el teorema invers de tales els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}, \overset{\Delta}{BHG}$ són semblants.

Aleshores:

$\angle HGB = \angle AED = b$

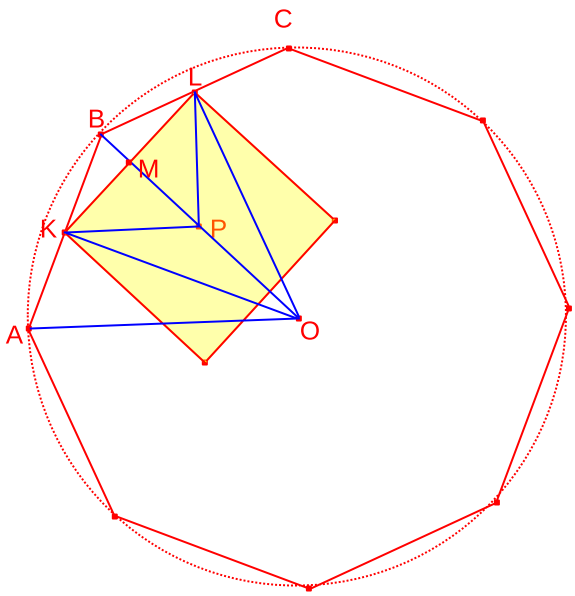
$a - b = 45°$

5068.- La figura està formada per polígons regulars de $2n$ costats.
Calculeu la proporció en cadascun del polígons, de l'àrea del polígon regular de n costats ombrejat i l'àrea del polígon regular de $2n$ costats.
Dos vèrtexs del polígon de n costats són punts migs de dos cotats consecutius del polígon de $2n$ costats.



Solució:
Siga el polígon regular de $2n$ costats de centre O, costat $\overline{AB}$ i radi $\overline{OA} = R$ de la circumferència circumscrita
Siga el polígon regular de n costats de costat $\overline{KL} = c$

$$\angle AOB = \angle KOL = \frac{\pi}{n}$$



L'àrea del polígon de $2n$ costats és:

$$S_{2n} = 2n\left(\frac{1}{2}\cdot R^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n}\right) = n\left(R^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\angle MOL = \frac{\pi}{2n}$$

Siga $a = \overline{OL}$

$$\frac{a}{R} = \cos\frac{\pi}{2n}$$

$$\frac{c}{2a} = \sin\frac{\pi}{2n}$$

$$c = R\cdot\sin\frac{\pi}{n}$$

Siga $r = \overline{PL}$ radi de la circumferència circumscrita al polígon regular de n costats

$$r = \frac{R\cdot\sin\frac{\pi}{n}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2}R$$

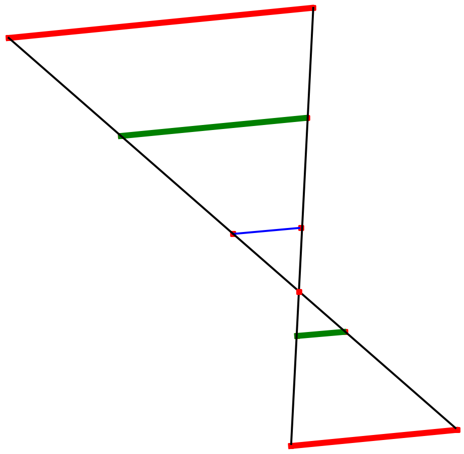
L'àrea del polígon de n costats és:

$$s_n = n\left(\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{8}n\left(R^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

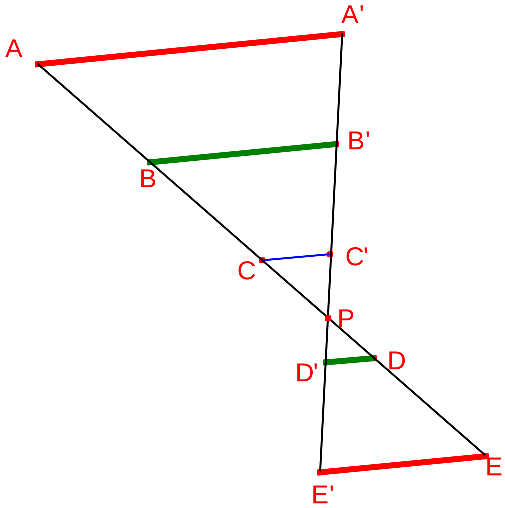
La proporció d'àrees és:

$$\frac{s_n}{S_{2n}} = \frac{\frac{1}{8}n\left(R^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)}{n\left(R^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{n}$$

5069.- La figura està formada per cinc segments paral·lels equidistants.
Calculeu la proporció entre la suma de longituds verda i la suma de longituds roja.



Solució:



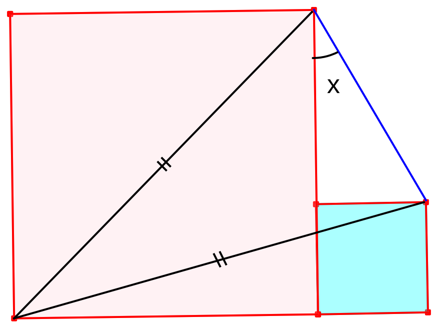
AB=BC=CD=DE=a
CP=b, DP=a-b

EE'=r1, AA'=r1
DD'=v1, BB'=v2

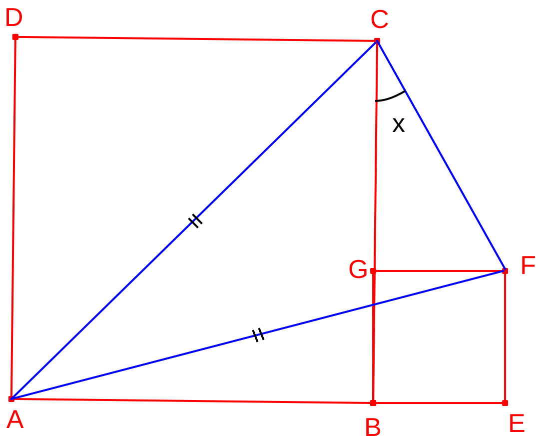
v1/(a-b) = v2/(a+b) = r1/(2a-b) = r2/(2a+b)
(g1+g2)/(2a) = (r1+r2)/(4a)

verd/roig = 1/2

5070.- La figura està formada per dos quadrat, dels quals tres vèrtexs formen un triangle isòsceles.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució 1:



AB=a, BE=b

AE=a+b, CG=a-b

Teorema Pitàgores ADC, AEF

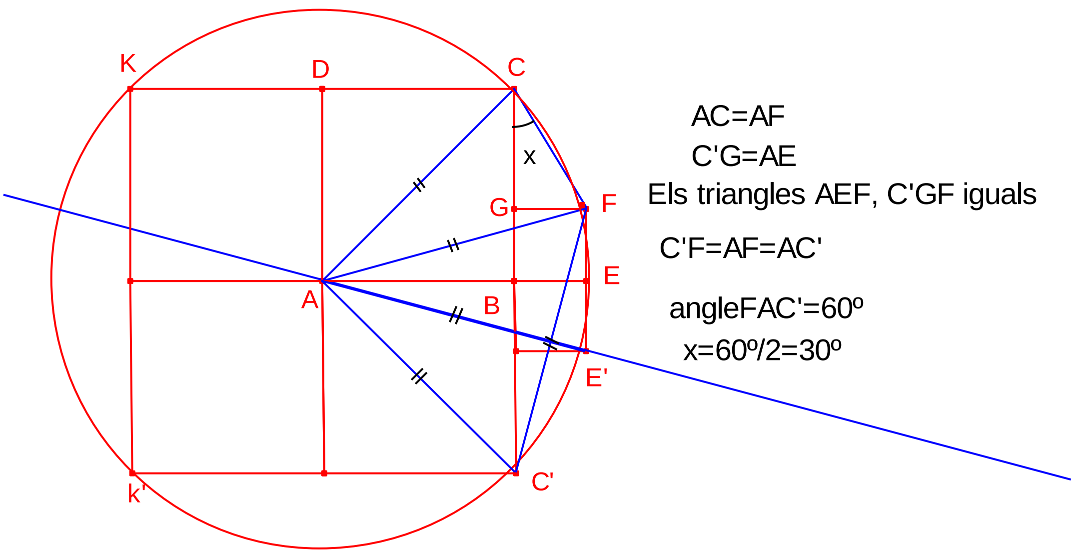
$2a^2=(a+b)^2+b^2$

a=(1+sqrt(3))b

tan x = b/(a-b)=sqrt(3)/3

x=30º

Solució 2:



AC=AF

C'G=AE

Els triangles AEF, C'GF iguals

C'F=AF=AC'

angleFAC'=60º

x=60º/2=30º