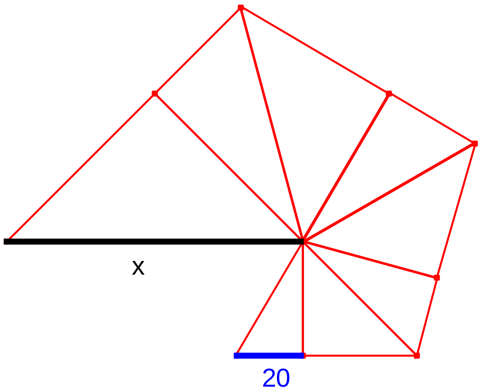
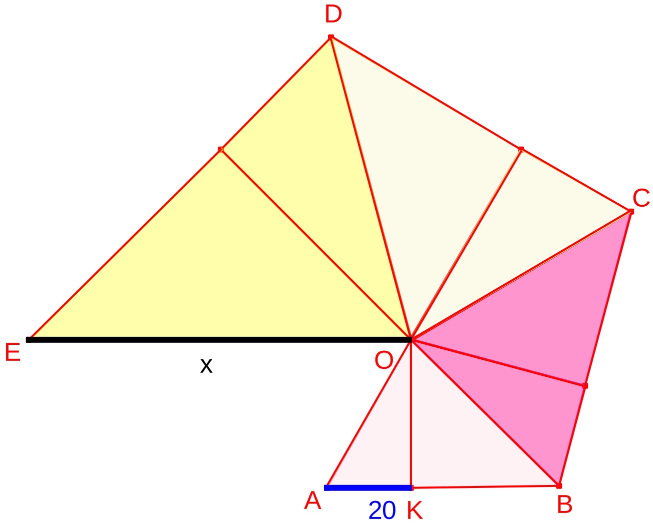
5071.- La figura està formada per triangles rectangles consecutius d'angles 30º i 45º
Calculeu la mesura del segment $x$




Solució:




Els triangles $\overset{\Delta}{OAB}, \overset{\Delta}{OBC}, \overset{\Delta}{OCD}, \overset{\Delta}{ODE}$ són semblants

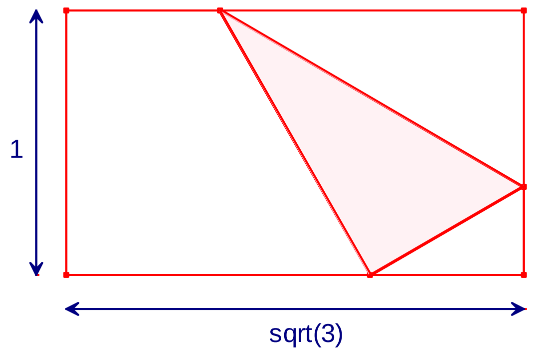
$\overline{OA} = 2 \cdot \overline{AK} = 40, \overline{OK} = \sqrt{3} \cdot \overline{AK} = 20\sqrt{3}$

$\overline{OB} = \overline{OK} \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{6} = 40 \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

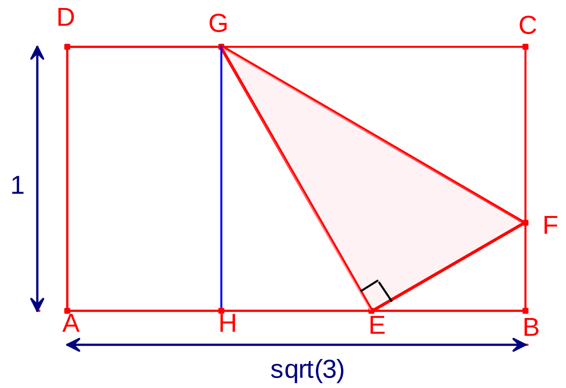
La raó de semblança dels costats és $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$x = 40\dfrac{\sqrt{6}}{2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = 90$

5072.- La figura està formada per un rectangle amb longituds determinades $1, \sqrt{3}$ es doblega de manera que la cantonada toque el costat oposat. Com mostra la figura.
Calculeu la fracció mínima ombrejada.




Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = \sqrt{3}, \overline{AD} = 1$
Siga $\overline{CF} = a, \overline{CG} = b, \angle CGF = \alpha$
$\angle HEG = 2\alpha$

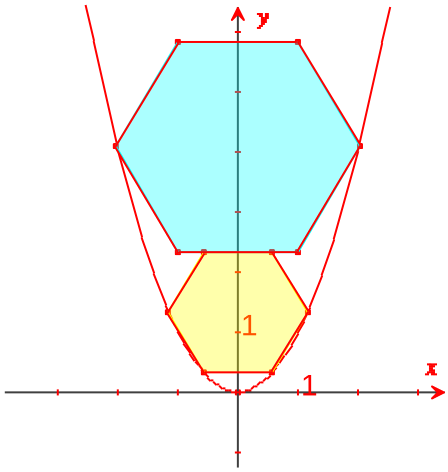



La proporció de les àrees és:
$$P(a,b) = \frac{S_{EFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}ab$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GHE}$:
$$\frac{1}{b} = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$
$$b = \frac{a}{\sqrt{2a-1}}$$
La proporció és:
$$P(a) = \frac{S_{EFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{a^2}{\sqrt{2a-1}}$$
$$P'(a) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{3a^2-2a}{\sqrt{2a-1}(2a-1)}$$
$$P'(a) = 0$$
$$a = \frac{2}{3}$$
$$P"\left(\frac{2}{3}\right) < 0$$
El mínim s’assoleix quan $a = \frac{2}{3}$
La proporció mínima és:
$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

5073.- La figura està formada per la paràbola $y = x^2$ i dos hexàgons regulars.

Calculeu la proporció entre l'àrea de l'hexàgon blau i l'àrea de l'hexàgon groc.




Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2a$
Siga l'hexàgon regular $GHIJKL$ de costat $\overline{GH} = 2b$

$B(a, a^2), D\left(a, a^2 + 2a\sqrt{3}\right)$

$C(2a, 4a^2),\ C\left(2a, a^2 + a\sqrt{3}\right)$

$4a^2 = a^2 + a\sqrt{3}$

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$G(b, b^2), I\left(b, a^2 + 2a\sqrt{3} + 2b\sqrt{3}\right)$

$H(2b, 4b^2),\ H\left(2b, a^2 + a\sqrt{3} + b\sqrt{3}\right)$

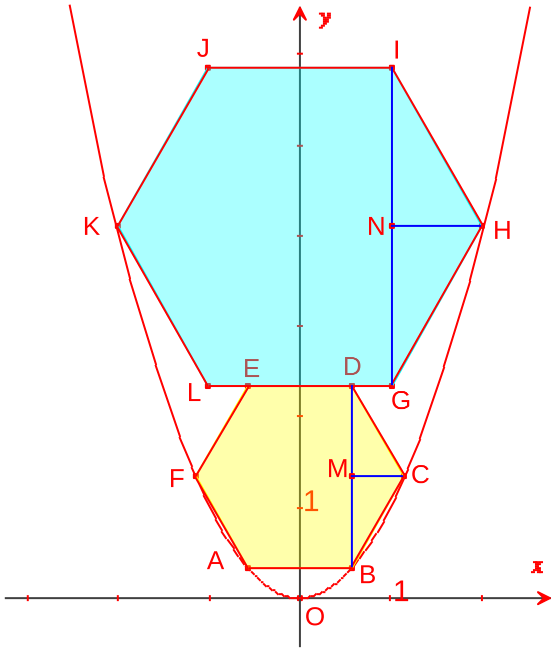
$4b^2 = a^2 + a\sqrt{3} + b\sqrt{3}$

$4b^2 = \dfrac{7}{3} + b\sqrt{3}$

$b = \dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

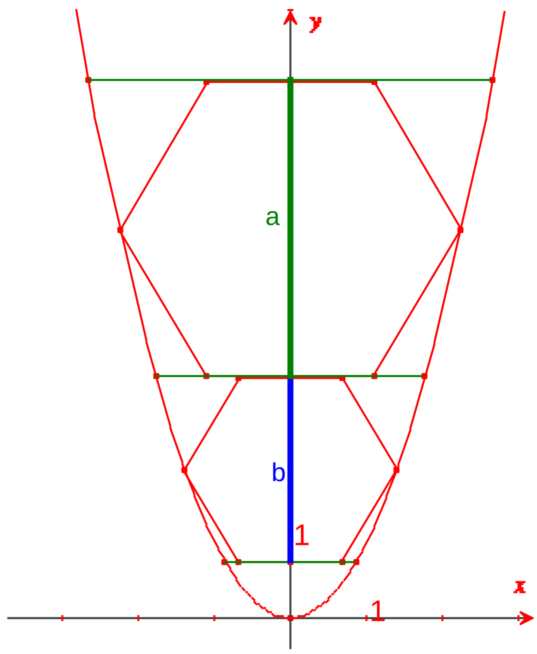
La proporció d'àrees és:

$\dfrac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = \left(\dfrac{7}{4}\right)^2$



5074.- La figura està formada per la paràbola $y = x^2$ i dos hexàgons regulars.

Calculeu $a - b$.




Solució:

Siguen els punts $O(0,0), A(0,c), B(0,b+c), P\left(0, c+\frac{1}{2}b\right)$

$$\overline{PL} = \frac{\sqrt{3}}{3}b$$

$$L\left(\frac{\sqrt{3}}{3}b, \frac{1}{3}b^2\right)$$

$$\frac{1}{3}b^2 = c + \frac{1}{2}b$$

$$C(0, a+b+c), P\left(0, b+c+\frac{1}{2}a\right)$$

$$\overline{QM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{1}{3}a^2\right)$$

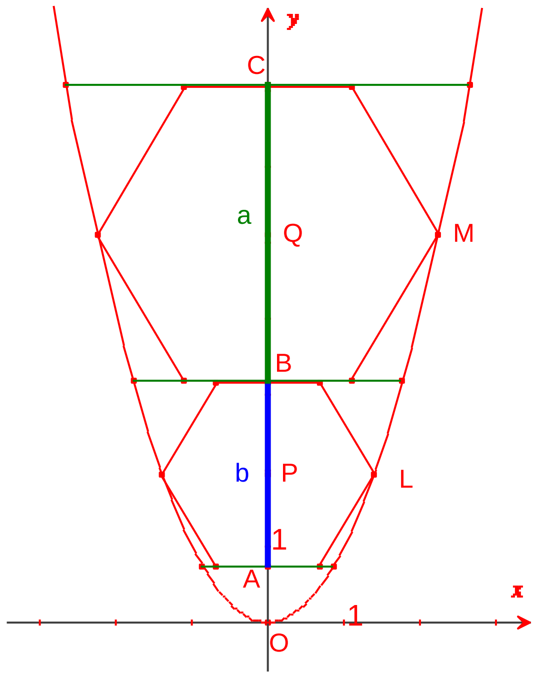
$$\frac{1}{3}a^2 = b + c + \frac{1}{2}a$$

Restant ambdues expressions:

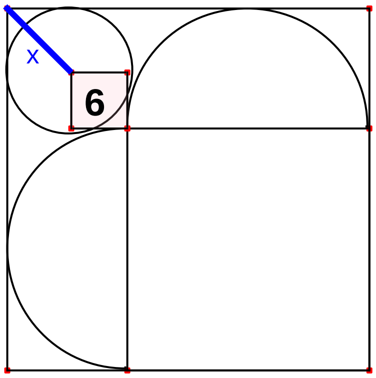
$$\frac{1}{3}(a^2 - b^2) = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\frac{1}{3}(a+b)(a-b) = \frac{1}{2}(a+b)$$

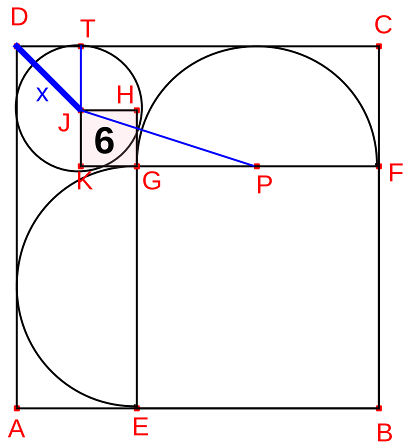
$$a - b = \frac{3}{2}$$



5075.- En la figura el quadrat ombrejat té àrea 6 i un vèrtex és centre de la circumferència.
Calculeu la mesura del segment $x$

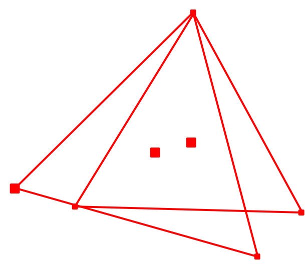



Solució:
Siga la circumferència de centre $J$ i radi $\overline{JT} = \overline{DT} = r$
Siga el quadrat $GHJK$ d'àrea 6 i costat $\overline{KG} = \sqrt{6}$
Siga el quadrat $BFGE$ de costat $\overline{FG} = 2R$
$\overline{FC} = R, \overline{FC} = r + \sqrt{6}$
$R = r + \sqrt{6}$
$\overline{KF} = R + \sqrt{6}$

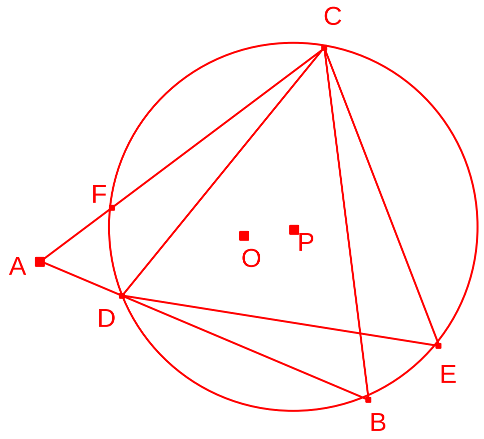



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JKF}$:
$(R + r)^2 = 6 + \left(R + \sqrt{6}\right)^2$
$2Rr + r^2 = 12 + 2\sqrt{6}R$
$2\left(r + \sqrt{6}\right)r + r^2 = 12 + 2\sqrt{6}\left(r + \sqrt{6}\right)$
$r^2 = 8$
$x = r\sqrt{2} = 4$

5076.- La figura està formada per dos triangles equilàters que comparteixen un vèrtex.
Demostreu que els centres dels triangles i el vèrtex remarcat són col·lineals.



Solució:




angleDEC=angleDBC=60º

DBEC cíclic

AO bisectriu FAD

AF·AC=AD·AB

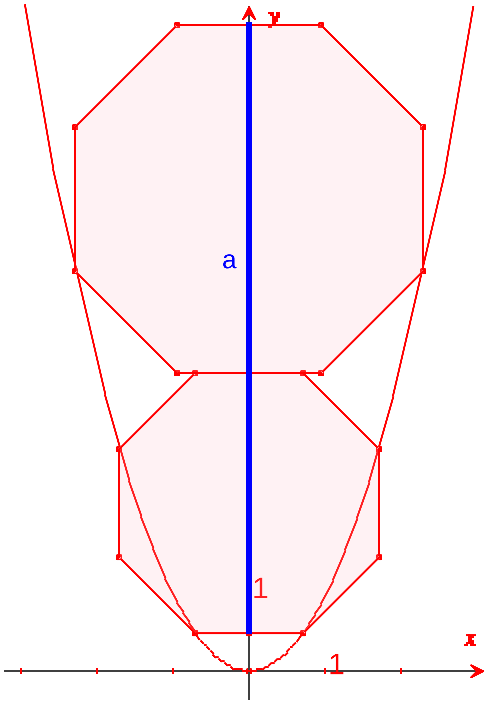
AF=AD

Els triangles AFP, ADP iguals

AP bisectriu FAD

A, O, P alineats

5077.- La figura està formada per la paràbola $y = x^2$ i dos octògons regulars.
Calculeu la mesura del segment $a$




Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = 2c$
Siga l'octògon regular $IJKLMNPQ$ de costat $\overline{IJ} = 2d$

$B(c, c^2), D\left((1+\sqrt{2})c, (3+2\sqrt{2})c^2\right)$

$(3+2\sqrt{2})c^2 = (2+\sqrt{2})c + c^2$

$c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$J\left(d, c^2 + (2+2\sqrt{2})c\right), K\left((1+\sqrt{2})d, (3+2\sqrt{2})d^2\right)$

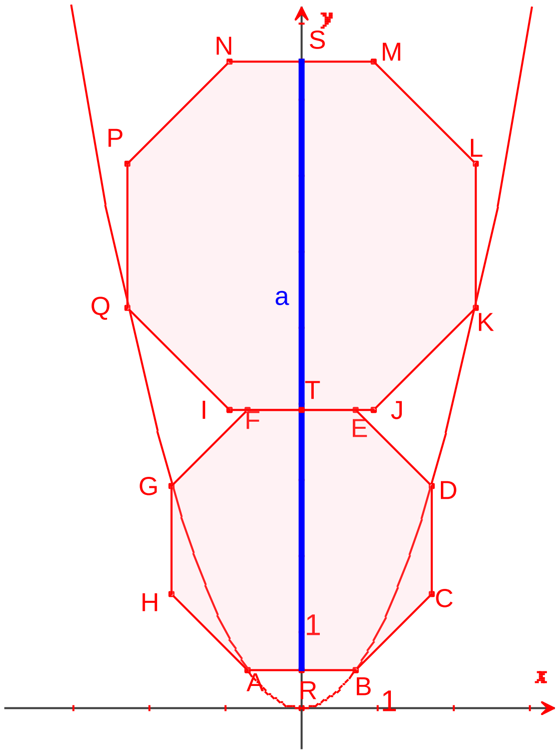
$(3+2\sqrt{2})d^2 = (2+\sqrt{2})c + c^2 + d\sqrt{2}$

$(3+2\sqrt{2})d^2 - \sqrt{2}d - \left(\dfrac{5}{2} + \sqrt{2}\right) = 0$

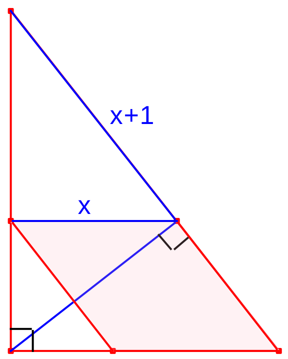
Resolent l'equació:

$d = \dfrac{7\sqrt{2} - 8}{2}$

$a = (2+2\sqrt{2})(c+d) = (2+2\sqrt{2})\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{7\sqrt{2}-8}{2}\right) = 8$



5078.- La figura està formada per un triangle rectangle que conté un triangle rectangle i un rombe.
Calculeu l'àrea del rombe ombrejat.




Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga el rombe $BDEF$ de costat $\overline{DE} = \overline{BD} = \overline{BF} = \overline{EF} = x$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADB}, \overset{\Delta}{CED}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AF} = 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EAF}, \overset{\Delta}{CED}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x+1}$$

Resolent l'equació:

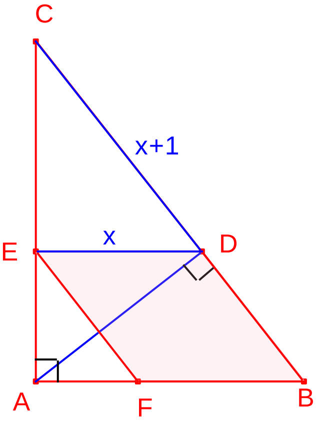
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$

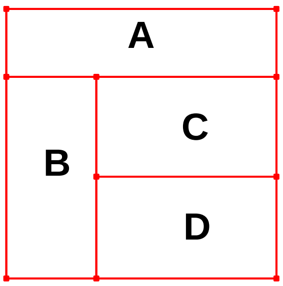
$$\overline{AE} = \sqrt{\Phi^2 - 1} = \sqrt{\Phi}$$

L'àrea del rombe és:

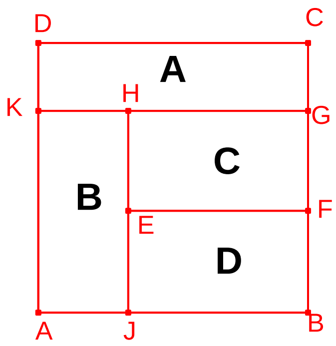
$$S_{BDEF} = \Phi\sqrt{\Phi} = \sqrt{2+\sqrt{5}} \approx 2.0582$$



5079.- La figura està formada per un quadrat d'àrea 81 que s'ha dividit en 4 rectangles d'igual àrea. Calculeu el perímetre del rectangle C.




Solució:




AB=9

BF=FG=a

JB=GH=b

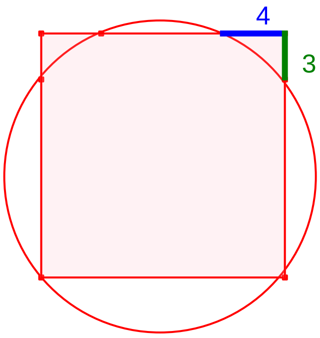
AJ=9-b, CG=9-2a

9(9-2a)=2a(9-b)=ab

a=27/8, b=6

P(EFGH)=2a+2b=75/4

5080.- La figura està formada per un quadrat i una circumferència.
Calculeu l'àrea del quadrat.




Solució:
Siga el quadrat $ABCD$
Siga $\overline{CF} = \overline{DG} = 4, \overline{CE} = \overline{DH} = 3$
Siga $\overline{FG} = a$
$\overline{BE} = \overline{AH} = 5 + a, \overline{AB} = 8 + a$
Aplicant la potència de C respecte de la circumferència:
$4(4 + a) = 3(8 + a)$
Resolent l'equació:
$a = 8$
$\overline{AB} = 16$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 16^2 = 256$