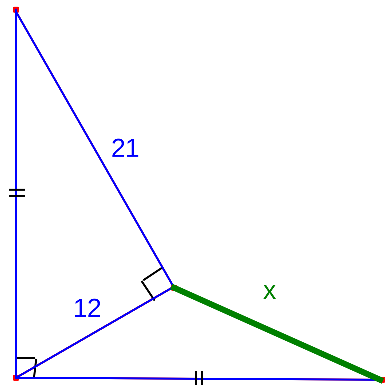
5081.- En la figura calculeu la mesura del segment $x$




Solució:

$\angle ABC = \angle BAD = \alpha$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

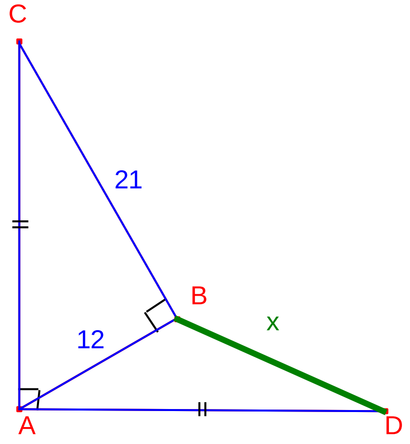
$\overline{AC} = \overline{AD} = \sqrt{21^2 + 12^2} = \sqrt{585}$

$\cos\alpha = \dfrac{21}{\sqrt{585}}$

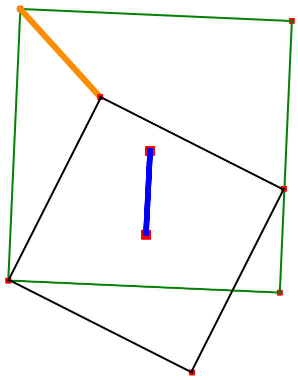
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$x^2 = 144 + 585 - 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{585}\dfrac{21}{\sqrt{585}} = 225$

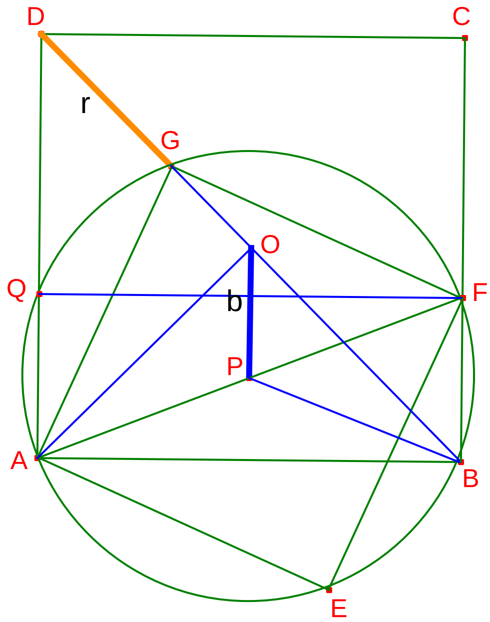
$x = 15$



5082.- La figura està formada per un dos quadrats que compareixen un vèrtex.
Un segment bla connecta els centres dels quadrats
El segment roig connecta dos vèrtexs.
Calculeu la proporció entre la longitud roja i la longitud blava.



Solució:




angleDAG=angleBAE=x
angleABF=angleAEF=90º

A, E, B, F, G, cíclic

angleGBG=45º

B, O, G alineats

angleAOG=90º

angleADB=45º

D, G, O, B alineat

triangles APO, BPO iguals

angleGAO=45º-x
angleAGO=45º+x

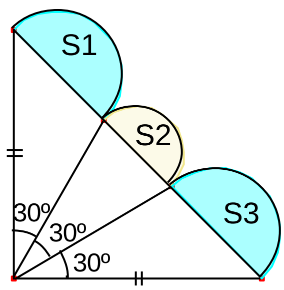
anglePBO=x

angleAOP=BOP=90º/2=45º

Els triangles AGD, BPO semblants
r/b = AG/BF = sqrt(2)

5083.- La figura està formada per un triangle rectangle isòsceles tal que l'angle recte s'ha dividit en tres angles iguals.
Calculeu la proporció d'àrees:

$$\frac{S_2}{S_1+S_3}$$

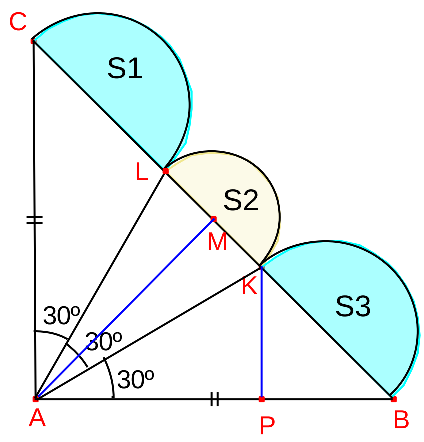



Solució:

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{AC} = 1, \overline{BC} = \sqrt{2}$
Siga $\angle BAK = \angle KAL = \angle LAC = 30°$
Siga M el punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Siga $P$ la projecció de $K$ sobre $\overline{AB}$
Siga $\overline{PB} = \overline{PK} = x$
$\overline{AP} = 1 - x, \overline{AK} = 2 \cdot \overline{KP} = 2x$




Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APK}$:
$4x^2 = x^2 + (1-x)^2$
$2x^2 + 2x - 1 = 0$
Resolent l'equació:

$$x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{KB} = x\sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

El radi de la semicircumferència $S_3$ és:

$$R = \frac{1}{2}\overline{KB} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

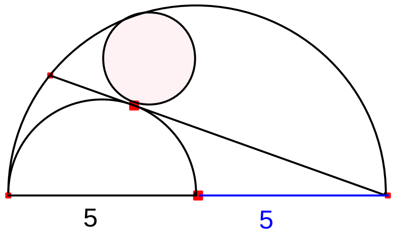
El radi de la semicircumferència $S_2$ és:

$$r = \overline{MK} = \overline{BM} - \overline{KB} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_2}{S_1+S_3} = \frac{r^2}{2R^2} = 2 - \sqrt{3}$$

5084.- La figura està formada per dues semicircumferències una recta tangent i una circumferència tangent a les dues semicircumferències i a la recta tangent en el punt de tangència.
Calculeu l'àrea del cercle.




Solució:
Siga la semicircumferència de centre $O$ i radi $\overline{OA} = 5$
Siga la semicircumferència de dintre $P$ i radi $\overline{PO} = \overline{PT} = \frac{5}{2}$, La recta $BT$ tangent a aquesta semicircumferència.

$\overline{PB} = \frac{15}{2}, \angle PTB = 90°$

Siga $\alpha = \angle TPB$

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$

Siga la circumferència de centre $Q$ i radi $\overline{QT} = r$

$\overline{PQ} = \frac{5}{2} + r, \overline{OQ} = 5 - r$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{POQ}$:

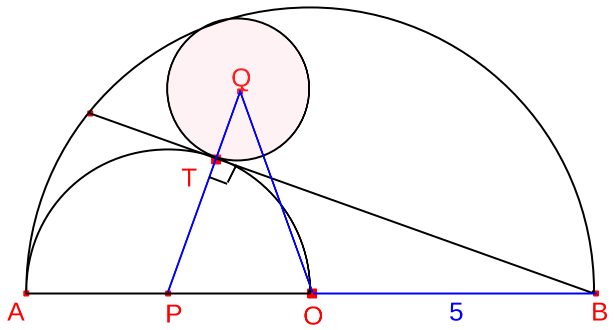
$(5-r)^2 = \frac{25}{4} + \left(\frac{5}{2} + r\right)^2$

Resolent l'equació:

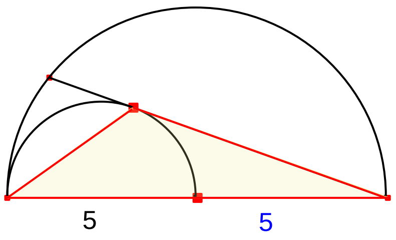
$r = \frac{5}{4}$

L'àrea del cercle és:

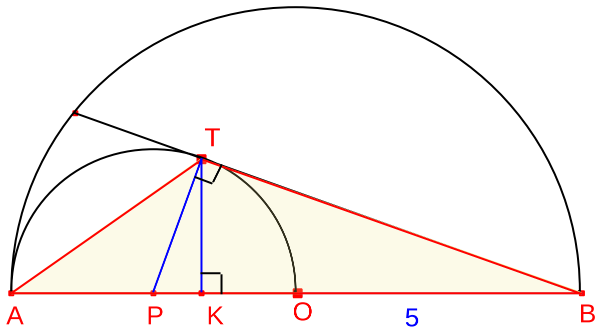
$S_{cercle} = \frac{25}{16}\pi$



5085.- La figura està formada per dues semicircumferències, una recta tangent a la semicircumferència menuda
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat




Solució:
Siga la semicircumferència de centre $O$ i radi $\overline{OA} = 5$
Siga la semicircumferència de dintre $P$ i radi $\overline{PO} = \overline{PT} = \frac{5}{2}$, La recta $BT$ tangent a aquesta semicircumferència.




$\overline{PB} = \frac{15}{2}, \angle PTB = 90°$

Els triangles rectangles $P\overset{\Delta}{T}B, P\overset{\Delta}{K}T$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PK}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{PK} = \frac{1}{3}\overline{PT} = \frac{5}{6}$$

$$\overline{BK} = \overline{PB} - \overline{PK} = \frac{15}{2} - \frac{5}{6} = \frac{20}{3}$$

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $P\overset{\Delta}{T}B$:

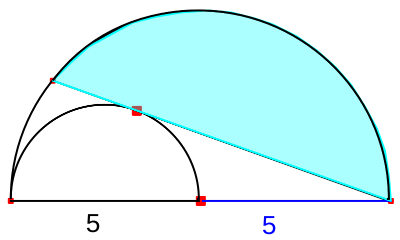
$$\overline{PT}^2 = \overline{PK} \cdot \overline{BK} = \frac{5}{6} \cdot \frac{20}{3} = \frac{25 \cdot 2}{9}$$

$$\overline{PT} = \frac{5}{3}\sqrt{2}$$

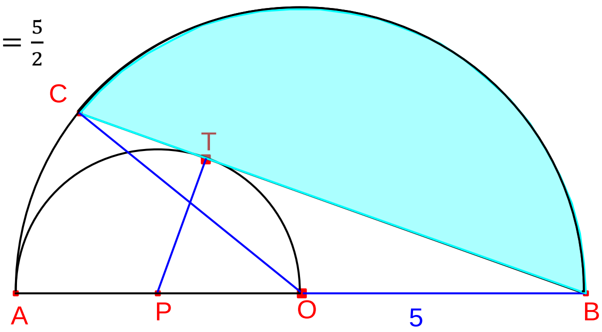
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{PT} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{5}{3}\sqrt{2} = \frac{25}{3}\sqrt{3}$$

5086.- La figura està formada per dues semicircumferències, una recta tangent a la semicircumferència menuda
Calculeu l'àrea del segment circular ombrejat

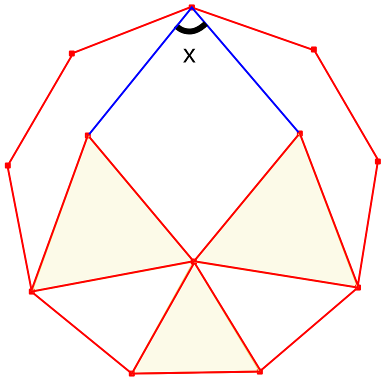



Solució:
Siga la semicircumferència de centre $O$ i radi $\overline{OA} = 5$
Siga la semicircumferència de dintre $P$ i radi $\overline{PO} = \overline{PT} = \frac{5}{2}$
La recta $BT$ tangent a aquesta semicircumferència.

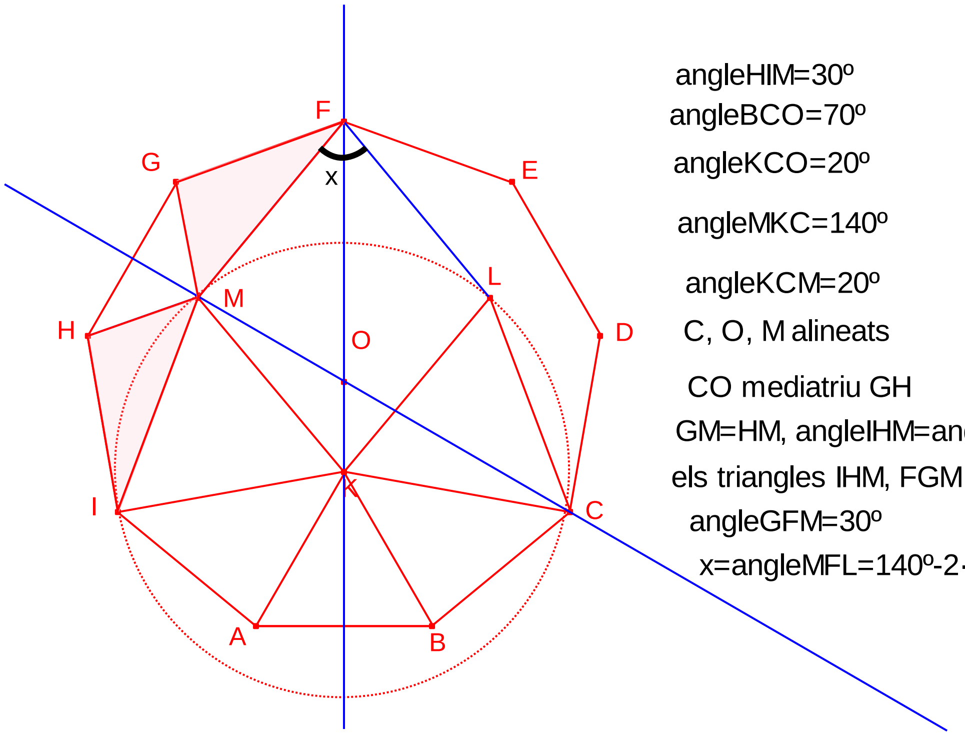



$\overline{PB} = \frac{15}{2}, \angle PTB = 90°$
Siga $\alpha = \angle TPB$
$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\angle COT = 2\alpha$
L'àrea del segment circular és:
$$S = \frac{2\alpha}{2} \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin 2\alpha = 25 \cdot \arccos\frac{1}{3} - \frac{50\sqrt{2}}{9} \approx 22.9172$$

5087.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats que conté tres triangles equilàters. Calculeu la mesura de l'angle $x$

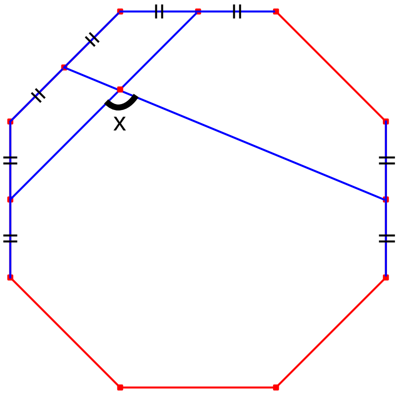



Solució:

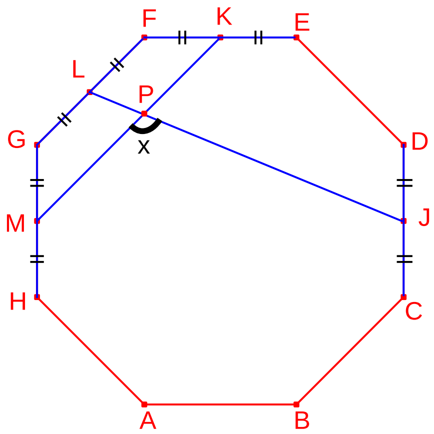



angleHIM=30º
angleBCO=70º
angleKCO=20º
angleMKC=140º
angleKCM=20º
C, O, M alineats
CO mediatriu GH
GM=HM, angleIHM=angleFGM
els triangles IHM, FGM iguals
angleGFM=30º
x=angleMFL=140º-2·30º=80º

5088.- La figura està formada per un octògon regular i dos segments que uneixen punts migs dels costats.
Calculeu la mesura de l'angle $x$




Solució:

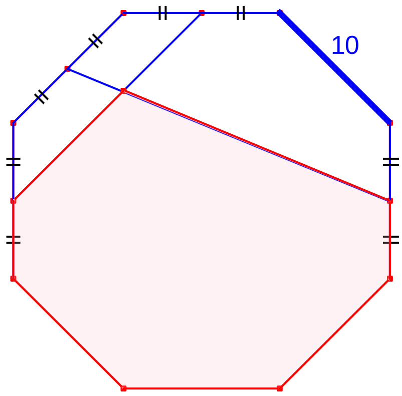



angleMKF=angleGMK=180º-135º=45º

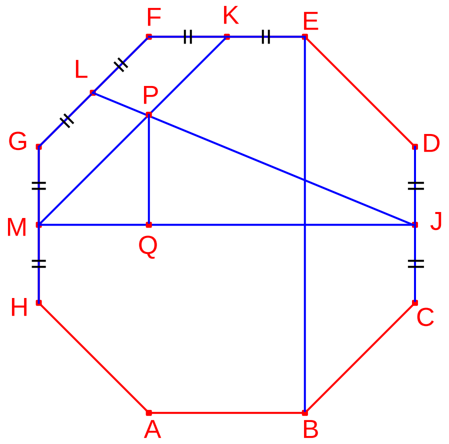
angleFLJ=angleDJL=(540º-(3·135º))/2=135º/2

x=360º-(45º+135º+135º/2)=225º/2

5089.- La figura està formada per un octògon regular de costat 10 i dos segments que uneixen punts migs dels costats.
Calculeu l'àrea del heptàgon ombrejat.

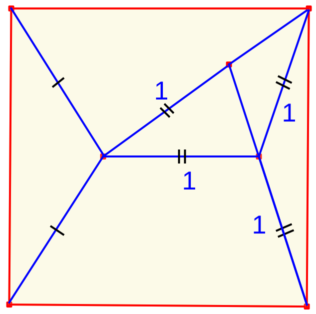



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siga $Q$ la projecció de $P$ sobre $\overline{MJ}$
$\overline{BE} = \overline{MJ} = 10(1+\sqrt{2})$
$\angle GMK = KMJ = 45°$
$\angle LJD = \dfrac{135°}{2}, \angle QJP = \dfrac{45°}{2}$

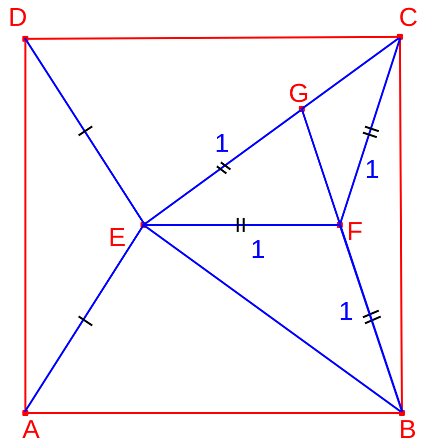



Siga $\overline{PQ} = \overline{MQ} = h$
$\overline{QJ} = 10(1+\sqrt{2}) - h$
$-1+\sqrt{2} = \tan\dfrac{45°}{2} = \dfrac{h}{10(1+\sqrt{2}) - h}$
Resolent l'equació:
$h = 5\sqrt{2}$
L'àrea del heptàgon $ABCJPMH$ és:
$S_{ABCJPMH} = \dfrac{1}{2}S_{ABCDEFGH} + S_{MJP} = \dfrac{1}{2}\left(\left(10(1+\sqrt{2})\right)^2 - 10^2\right) + \dfrac{1}{2}\cdot 10(1+\sqrt{2})\cdot 5\sqrt{2}$
$S_{ABCJPMH} = 25(6+5\sqrt{2})$

5090.- La figura està formada per un quadrat i tres triangles isòsceles dos d'ells els costats iguals mesuren 1.
Calculeu l'àrea del quadrat.




Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
$E, F$ pertanyen a la mediatriu dels costats $\overline{AD}, \overline{BC}$, respectivament.
$\overline{EF}$ pertany a la paral·lelogram mitjana del quadrat.




Siga $\alpha = \angle FBC = \angle FCB$
Siga $\beta = \angle CEF = \angle ECF = \angle FEB = \angle FBE$
$\angle GFC = 2\alpha, \angle GFC = 90° + \frac{\beta}{2}$
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{CGF}$ és 180º
$\beta + 2\alpha + 90° + \frac{\beta}{2} = 180°$
Simplificant:
$3\beta + 4\alpha = 180°$
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és 180º
$4\beta + 2\alpha = 180°$
Resolent el sistema:
$\alpha = 18°, \beta = 36°$
$\angle BFE = 108°$
$\overline{BE} = \overline{CE} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:
$\frac{c}{\sin 72°} = \frac{\Phi}{\cos 36°} = 2$
$c = 2 \cdot \sin 72° = 2 + \Phi$