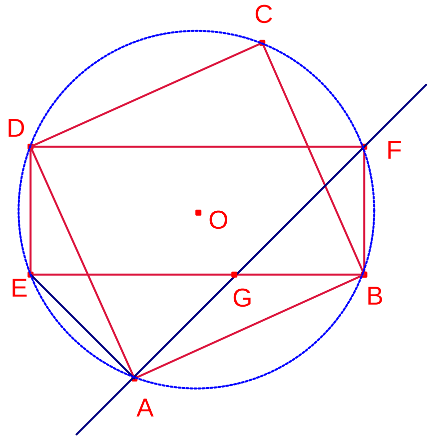
Problemes de Geometria per a l'ESO 51

501.- Siguen ABCD, EBFD, un quadrat i un rectangle que tenen la mateixa diagonal $\overline{BD}$ tal que els punts A, E estan en el mateix semiplànol que determina $\overline{BD}$.
La recta perpendicular a $\overline{AE}$ que passa pel punt A talla la recta BE en el punt G.
Proveu que $\overline{BG} = \overline{DE}$.
Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 31, problema 75.

Solució:

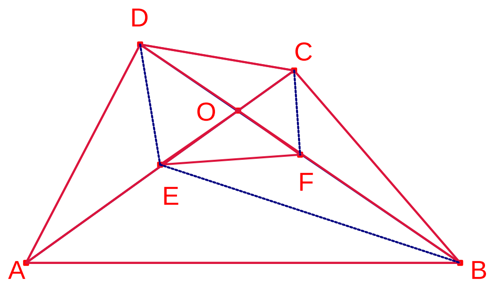


El punt mig O de la diagonal $\overline{BD}$ és centre de la circumferència circumscrita al quadrat i al rectangle.
$\angle DAE = \angle GAB$ per ser angles inscrits en la circumferència circumscrita al quadrat i al rectangle.
$\angle EDA = \angle ABG$, per ser angles inscrits en la circumferència circumscrita al quadrat i al rectangle.
$\overline{AD} = \overline{AB}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ABG}$ són iguals, aleshores:
$\overline{DE} = \overline{BG}$.

502.- Siga ABCD un quadrilàter.
Siga O la intersecció de les diagonals $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.
Siguen E, F els punts migs de les diagonals $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, respectivament.
Proveu que $\left|(S_{AOB}+S_{COD})-(S_{AOD}+S_{BOC})\right| = 4\cdot S_{EOF}$.
Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 57, problema 17.

Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen igual àrea.
Suposem que E pertany al segment $\overline{AO}$ i F pertany al segment $\overline{BO}$.
Siga $X = S_{EOF}$
Siga $K = S_{FOC}$, $L = S_{COD}$, $M = S_{DOE}$.



Els triangles $\overset{\Delta}{CED}$, $\overset{\Delta}{AED}$ tenen igual àrea.
$S_{AED} = L + M$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DFC}$, $\overset{\Delta}{BFC}$ tenen igual àrea.
$S_{BFC} = K + L$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DFE}$, $\overset{\Delta}{BFE}$ tenen igual àrea.
$S_{BFE} = X + M$.
$S_{CEB} = 2X + 2K + L + M$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CEB}$, $\overset{\Delta}{AEB}$ tenen igual àrea.
$S_{AEB} = 2X + 2K + L + M$.

$S_{AOB} = 4X + 2K + L + 2M$.
$S_{COD} = L$.
$S_{AOB} + S_{COD} = 4X + 2K + 2L + 2M$.

$S_{AOD} = L + 2M$.
$S_{BOC} = 2K + L$.
$S_{AOD} + S_{BOC} = 2K + 2L + 2M$.

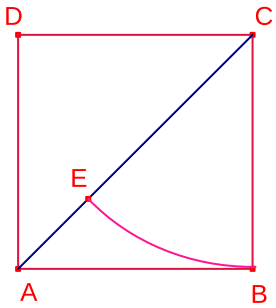
$(S_{AOB}+S_{COD})-(S_{AOD}+S_{BOC}) = 4X = 4\cdot S_{EOF}$.

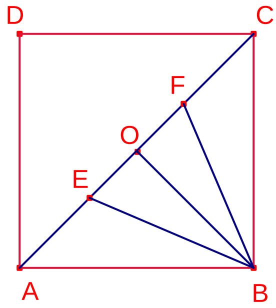
Anàlogament:
Si E pertany al segment $\overline{CO}$ i F pertany al segment $\overline{DO}$, aleshores:
$(S_{AOB}+S_{COD})-(S_{AOD}+S_{BOC}) = 4\cdot S_{EOF}$.
Si E pertany al segment $\overline{AO}$ i F pertany al segment $\overline{DO}$, aleshores:
$(S_{AOD}+S_{BOC})-(S_{AOB}+S_{COD}) = 4\cdot S_{EOF}$.
Si E pertany al segment $\overline{CO}$ i F pertany al segment $\overline{BO}$, aleshores:
$(S_{AOD}+S_{BOC})-(S_{AOB}+S_{COD}) = 4\cdot S_{EOF}$.

503.- Siga E un punt de la diagonal $\overline{AC}$ del quadrat ABCD tal que $\overline{CE}=\overline{BC}$.

Proveu que $\overline{BE}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$.

Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 61, problema 63.





Solució:

Siga O el centre del quadrat ABCD.

Siga F de la diagonal tal que $\overline{AF}=\overline{BC}$.

$\overline{BE}=\overline{BF}$

El triangle $\overset{\Delta}{CBE}$ és isòsceles.

$\angle ECB=45^o$, $\angle BEC=\angle EBC=\frac{135^o}{2}$.

$\angle ABE=90^o-\frac{135^o}{2}=\frac{45^o}{2}$.

$\angle EBF=45^o$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CBE}$, $\overset{\Delta}{BEF}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BE}}$.

$\overline{BE}^2=\overline{CE}\cdot\overline{EF}=\overline{AB}\cdot 2\cdot\overline{OE}$.

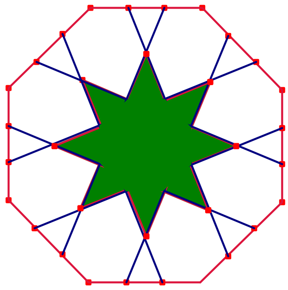
$\overline{BE}$ és bisectriu del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$.

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}=\frac{2\cdot\overline{OE}}{2\cdot\overline{OB}}=\frac{2\cdot\overline{OE}}{\overline{AC}}$. Aleshores:

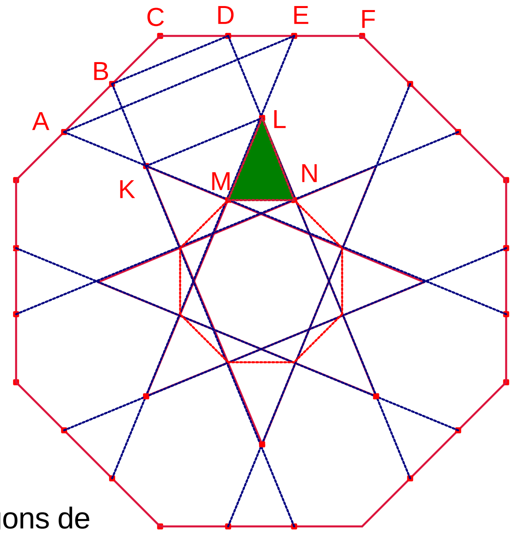
$\overline{AB}\cdot 2\cdot\overline{OE}=\overline{AE}\cdot\overline{AC}$.

Aleshores, $\overline{BE}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$.



504.- La figura representa un taulell dissenyat per Gaudí.
Està format per 8 segments que connecten els punts en que estan dividits en tres parts iguals els costats d'un octògon regular, formant un octògon regular estrellat.
Determineu la proporció entre les àrees de l'octògon estrellat i l'octògon inicial.
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. Febrer 2012.

Solució:
L'àrea de l'octògon estrellat és igual a dues vegades l'àrea de l'octògon regular de costat $\overline{MN}$.



Els segments $\overline{BD}$, $\overline{AE}$ són paral·lels i $\overline{CD} = \overline{DE}$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ACE}$:

$\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{AE}$.

$\overline{KL} = \overline{BD}$.

Els segments $\overline{KL}$, $\overline{AE}$ són paral·lels.

Aplicant el teorema de Tales als triangles $\overset{\Delta}{KLM}$, $\overset{\Delta}{AEM}$:

$\overline{LE} = \overline{LM}$.

Aleshores, els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{DEL}$, $\overset{\Delta}{MNL}$ són iguals, per tant:

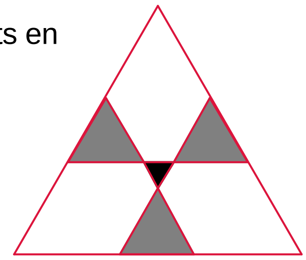
$\overline{MN} = \overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{AF}$.

Els octògons regulars són semblants, aleshores els octògons de costat $\overline{MN}$ i $\overline{CF}$ són semblants i la raó de semblança és 1:3.

La raó entre les àrees és $1^2 : 3^2$.

La raó entre les àrees de l'octògon estrellat i l'octògon de costat $\overline{CF}$ és $2\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

505.- En la figura, un triangle equilàter està dividit amb tres segments en set regions.
Les regions grises són triangles equilàters de costat 5cm i la regió central negra és un triangle equilàter de costat 2cm.
Determineu la longitud del triangle equilàter exterior.
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. Febrer 2012.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter exterior.

Siga $\overset{\Delta}{KLM}$ el triangle equilàter central de costat $\overline{KL}=\overline{KM}=2$.

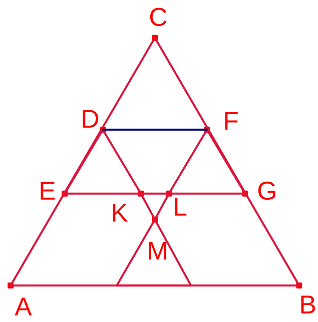
Siga $\overset{\Delta}{DEK}$ triangle gris de costat $\overline{DE}=\overline{DK}=5$

Siga $\overset{\Delta}{LGF}$ triangle gris de costat 5.

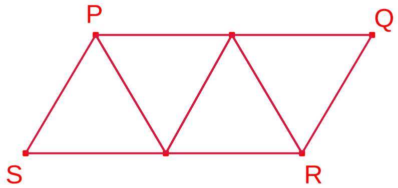
$\overset{\Delta}{DFM}$ és un triangle equilàter de costat
$\overline{DF}=\overline{DM}=\overline{DK}+\overline{KM}=5+2=7$.

$\overset{\Delta}{DFC}$ és un triangle equilàter de costat $\overline{DF}=\overline{CD}=7$.
$\overline{AE}=\overline{CD}=7$.

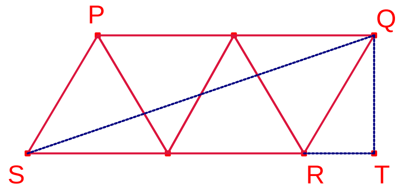
El costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$\overline{AC}=2\overline{CD}+\overline{DE}=2\cdot 7+5=19\text{cm}$.



506.- El paral·lelogram PQRS està format ajuntant 4 triangles equilàters de costat 1.
Determineu la mesura de la diagonal $\overline{SQ}$
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. Febrer 2012.



Solució:
Siga T la projecció de Q sobre la recta SR.



$\overline{RT} = \frac{1}{2}\overline{QR} = \frac{1}{2}$.

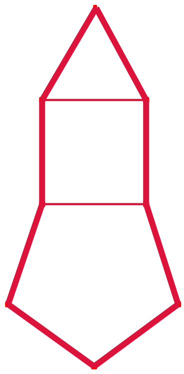
$\overline{QT} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\overline{ST} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{STQ}$

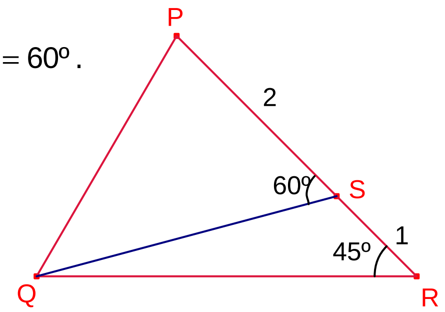
$$\overline{SQ} = \sqrt{\overline{AT}^2 + \overline{QT}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{7}\,.$$

507.- Amb un triangle equilàter un quadrat i un pentàgon regular s'ha format un polígon (veure figura).
Calculeu la mesura de la suma dels angles interiors del polígon resultant.
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. Febrer 2012.



Solució:
La suma dels angles interiors del polígons és igual a la suma dels angles del triangle del quadrat i del pentàgon regular.
$s = 180º + 2 \cdot 180º + 3 \cdot 180º = 6 \cdot 180º = 1080º$.

508.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ tal $R = 45^o$.
Siga S un punt del costat $\overline{PR}$ que $\overline{PS} = 2$, $\overline{RS} = 1$, $\angle QSP = 60^o$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle QPR$.

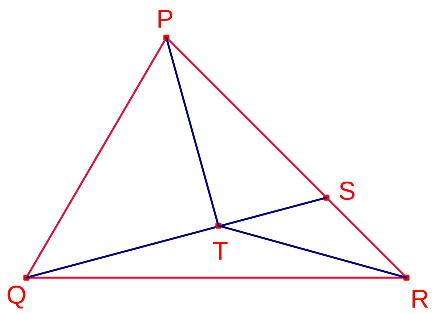


Solució
Siga T la projecció de P sobre $\overline{QS}$.

$\overline{ST} = \frac{1}{2}\overline{PS} = 1$.

$\angle QSR = 120^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{TRS}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle TRS = \angle RTS = 30^o$.

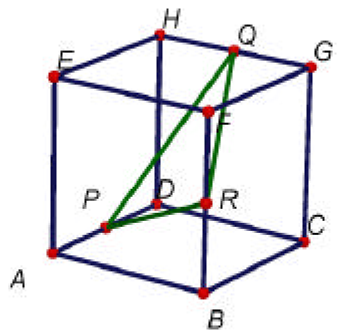


Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PRT}$ és isòsceles, $\overline{PT} = \overline{TR}$.
$\angle TRQ = \angle QRS - \angle TRS = 45^o - 30^o = 15^o$.
$\angle SQR = 180^o - (\angle QSR + \angle QRS) = 180^o - (120^o + 45^o) = 15^o$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{QRT}$ és isòsceles, $\overline{QT} = \overline{TR}$
$\overline{QT} = \overline{PT}$.

Aleshores, el triangle rectangle $\overset{\Delta}{QTP}$ és isòsceles.
$\angle QPT = 45^o$.
$\angle TPS = 30^o$.
Aleshores, $\angle QPS = \angle QPT + \angle TPS = 45^o + 30^o = 75^o$.

509.- Siga ABCDEFGH un cub d'aresta 2.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$, Q el punt mig de l'aresta $\overline{GH}$, R el punt mig de l'aresta $\overline{BF}$. Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBR}$:

$\overline{PR}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BR}^2 = 5 + 1^2 = 6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FGQ}$:

$\overline{QF}^2 = \overline{GF}^2 + \overline{QG}^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QFR}$:

$\overline{QR}^2 = \overline{QF}^2 + \overline{FR}^2 = 5 + 1^2 = 6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HQD}$:

$\overline{QD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HG}^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QDP}$:

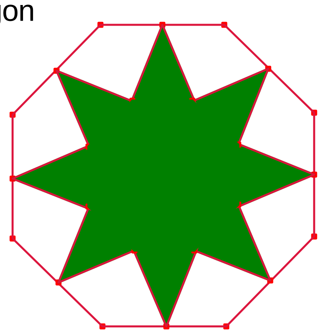
$\overline{QP}^2 = \overline{QD}^2 + \overline{PD}^2 = 5 + 1^2 = 6$.

Aleshores:

$\overline{PR}^2 = \overline{QR}^2 = \overline{QP}^2 = 6$, per tant, el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és equilàter la seua àrea és:

$$S_{PQR} = \frac{\overline{PR}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

510.- En els punts mig d'un octògon regular s'ha dibuixat un octògon regular estrellat.
Determineu la proporció entre les àrees de l'octògon estrellat i l'octògon regular.



Solució:
L'octògon regular està format per 32 triangles.
El octògon regular està format per 16 triangles.
L'àrea de l'octògon estrellat és la meitat de l'àrea de l'octògon.