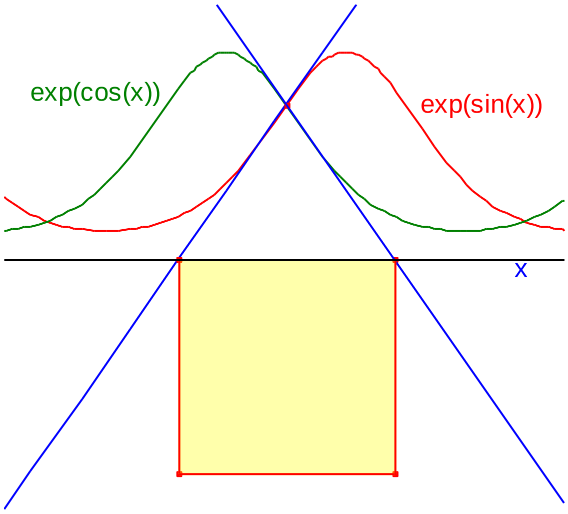
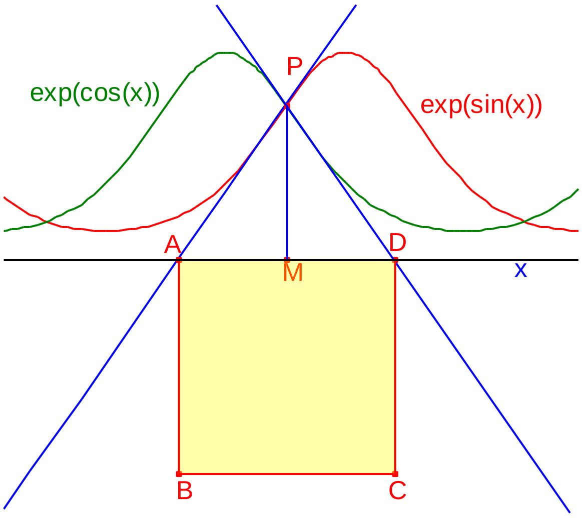
5111.- La figura està formada per les funcions $y = e^{\sin(x)}, y = e^{\cos(x)}$ l'eix d'abscisses i dues rectes tangents a les funcions en el punt d'intersecció.
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.

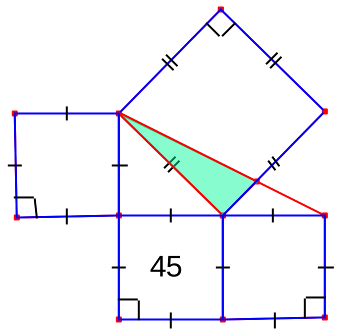


Solució:
Calculem el punt P intersecció de les dues funcions.
$e^{\sin(x)} = e^{\cos(x)}$
$\sin x = \cos x$
$x = \frac{\pi}{4}$
$P\left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$
$M\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$
Siga $f(x) = e^{\sin(x)}$
$f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin(x)}$
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
Calculem la recta tangent AP:
$r_{AP} \equiv y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

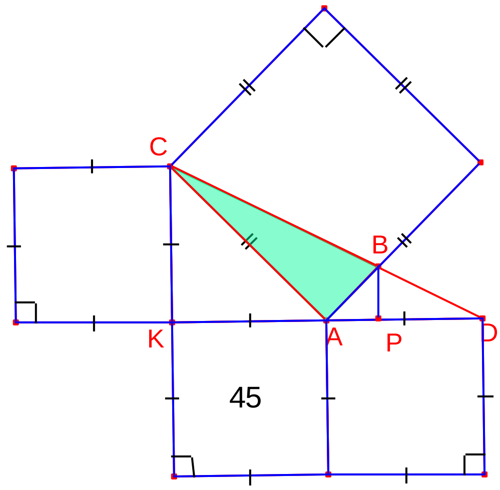


Determinem les coordenades del punt A, intersecció de la recta tangent AP i l'eix d'abscisses.
$0 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
Resolent l'equació:
$x = \frac{-8 + \pi\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$
$A\left(\frac{4\sqrt{2} + \pi}{4}, 0\right)$
$\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AM} = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{4\sqrt{2} + \pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$

5112.- La figura està formada per quatre quadrats, tres d'ells iguals d'àrea 45.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



[KAC]=[ADC]=45/2

BP=x

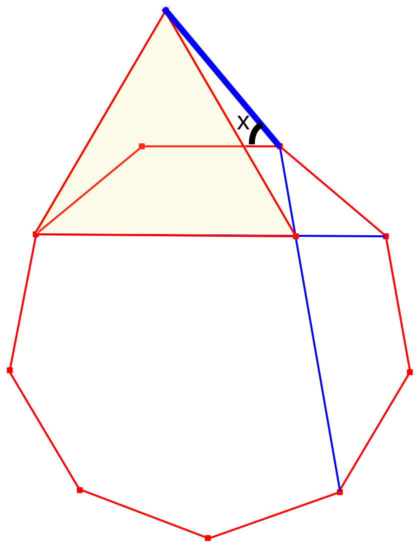
AP=x, DP=2x

AD=3x=sqrt(45)
x=sqrt(45)/3

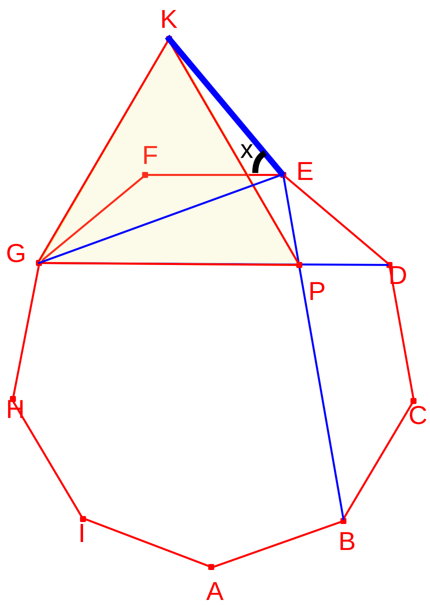
[ADB]=3x²/2=15/2

[ABC]=45/2-15/2=15

5113.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i un triangle equilàter. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleEGD=angleFGE=20º

angleKGF=60º-40º=20º

angleBED=angleEDG=40º

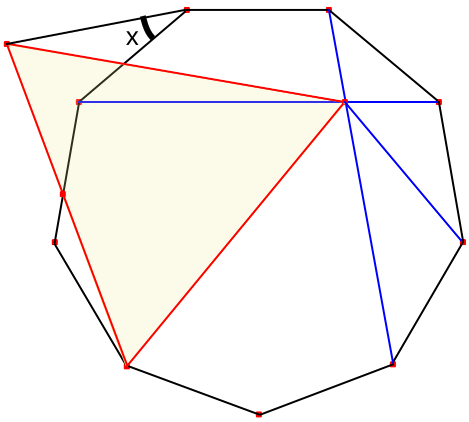
angleGPE=angleGEP=80º

GK=GP=GE

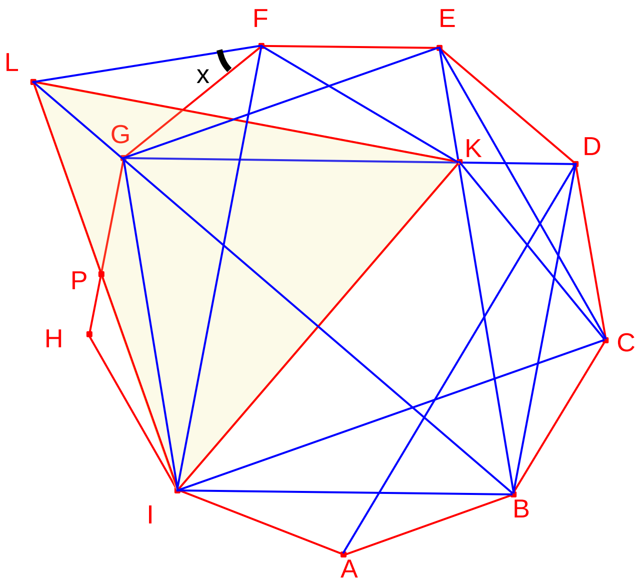
angleGEK=angleGKE=70º

x=70º-20º=50º

5114.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x

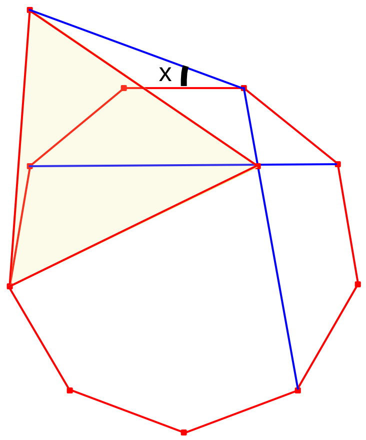


Solució:

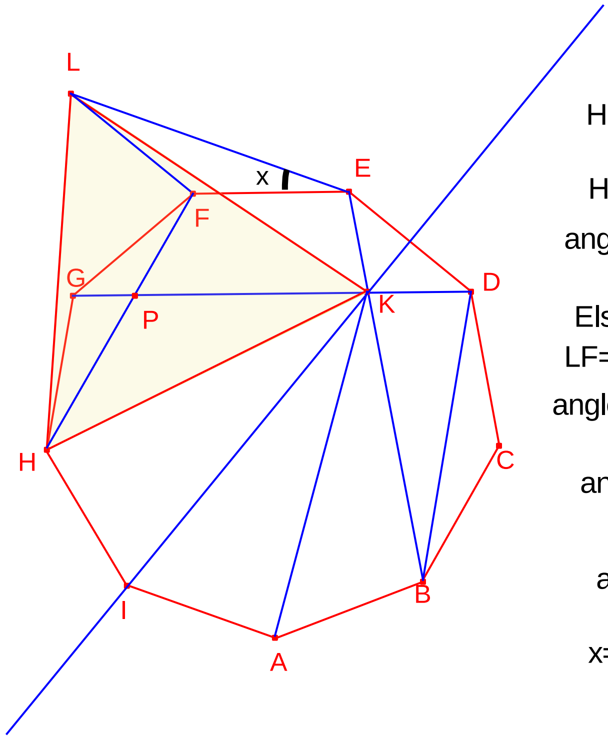


GI, BE paral·lels
BD=BK
IBKG rombe
BE mediatriu IK
I, G, B alineats
angleGIK=50º
angleLIG=angleHIG=10º
Els triangles LIF, KIF, IKC iguals
Els triangles LGF, KDC iguals
LG=DK=EK
angleLPG=anglePLG=30º
GP=LG
els triangles PIG, KCE iguals
angleKCE=10º
angleKCD=40º-10º=30º
x=angleLGF=angleKCD=30º

5115.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



HK=AH

HF=GK, HL=HK

angleLHK=60º, angleFPK=60º

Els triangles HFL, GKH són iguals

LF=GH=FE

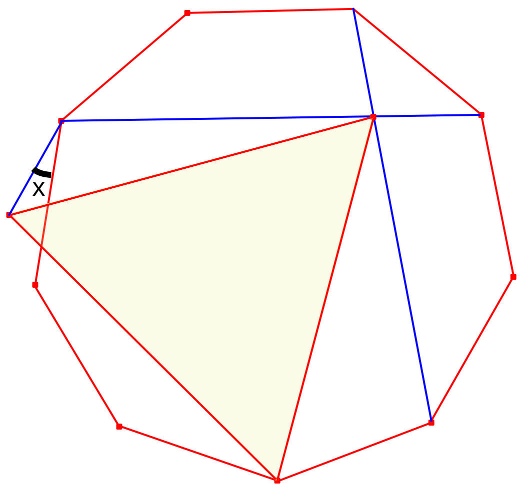
angleLFH=angleHGD=100º

angleAFE=120º

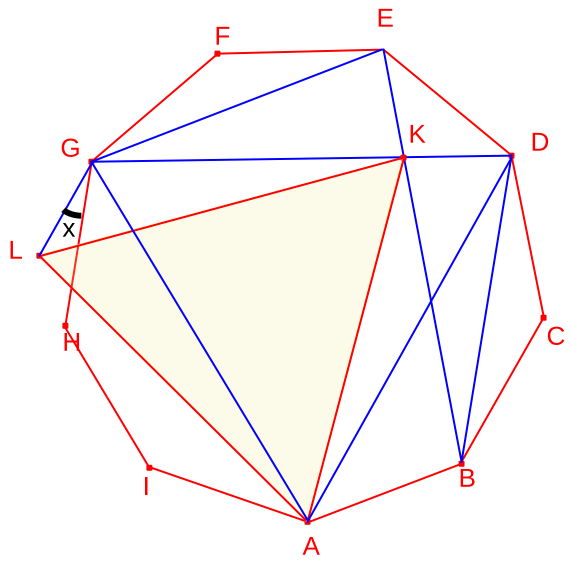
angleLF·=140º

x=angleFEL=angleFLE=20º

5116.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



AL=AK, AD=AG

angleLAK=angleGAD

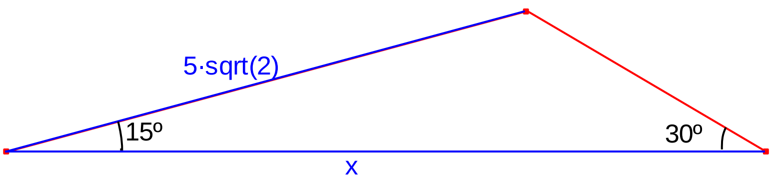
Els triangles ALG, AKD són iguals

angleLGA=angleKDA=60º

angleHGA=40º

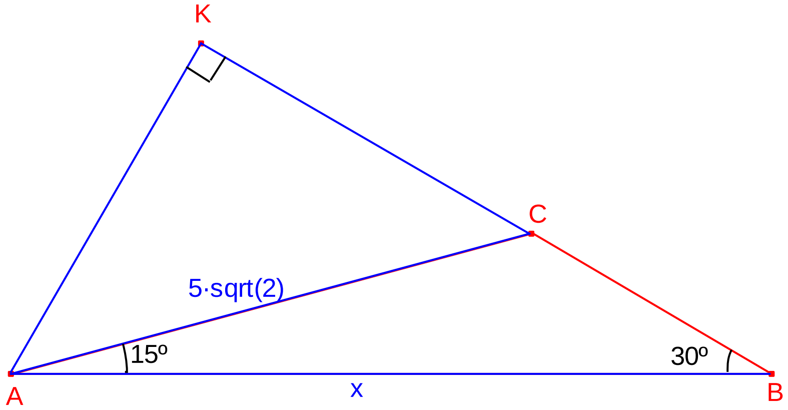
x=angleLGH=60º-40º=20

5117.- En la figura, calculeu la mesura del costat x del triangle.



´

Solució 1:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = 5\sqrt{2}, A = 15°, B = 30°, \overline{AB} = x$
Siga K la projecció de A sobre la recta BC
$\angle KAC = \angle ACK = 45°, \angle AKC = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKC}$:

$$\overline{AK} = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$
$$x = 2 \cdot \overline{AK} = 10$$

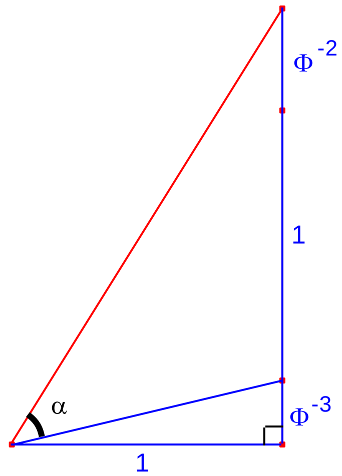
Solució 2:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = 5\sqrt{2}, A = 15°, B = 30°, \overline{AB} = x$
$C = 135°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{x}{\sin 135°} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin 30°}$$
$$x = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sin 135°}{\sin 30°} = 10$$

5118.-
En la figura, calculeu la mesura de l'angle α



Solució

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90º, \overline{AB} = 1, \overline{BD} = \Phi^{-2}, \overline{DE} = 1, \overline{CE} = \Phi^{-2}$

$\overline{BC} = 1 + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} = 1 + \frac{1+\Phi}{\Phi^3} = 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$

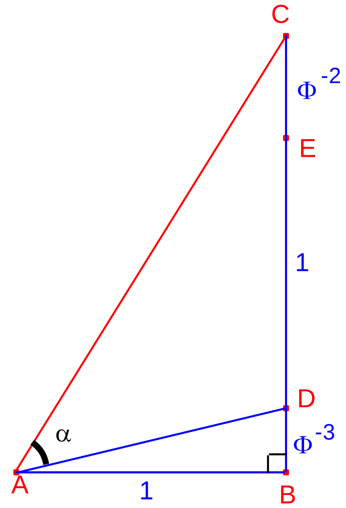
Siga $\beta = \angle DAB$

$$\Phi = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \frac{1}{\Phi^3}}{1 - \frac{1}{\Phi^3}\cdot\tan\alpha} = \frac{\Phi^3\cdot\tan\alpha + 1}{\Phi^3 - \tan\alpha}$$

$\Phi^4 - \Phi\cdot\tan\alpha = \Phi^3\cdot\tan\alpha + 1$

$$\tan\alpha = \frac{\Phi^4 - 1}{\Phi(\Phi^2+1)} = \frac{\Phi^2 - 1}{\Phi} = 1$$

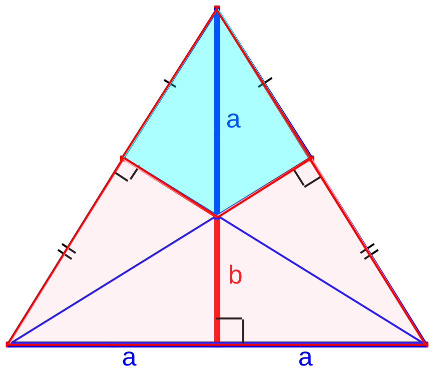
$\kappa = 45°$



5119.- En la figura calculeu les següents proporcions.

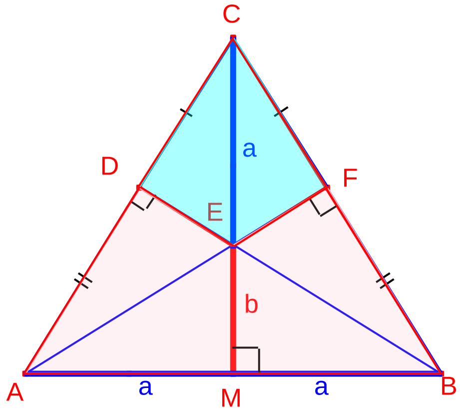
$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{[rosa]}{[Blava]}$$



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$

$$\overline{AE} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AME}, \overset{\Delta}{CMB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AME}, \overset{\Delta}{CFE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{CF} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \overline{EF} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

L'àrea blava és:

$$[blava] = \overline{CF} \cdot \overline{EF} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^3 b}{a^2+b^2} = \frac{\Phi^3}{1+\Phi^2} b^2$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 2a(a+b) = (\Phi^2 + \Phi) \cdot b^2 = \Phi^3 \cdot b^2$$

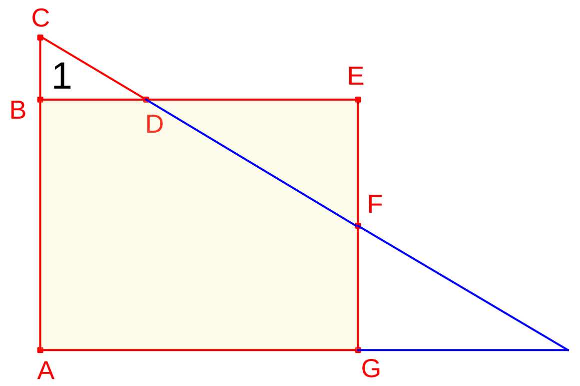
L'àrea rosa és:

$$[rosa] = S_{ABC} - [blava] = \Phi^3 \cdot b^2 - \frac{\Phi^3}{1+\Phi^2} b^2 = \frac{\Phi^5}{1+\Phi^2} \cdot b^2$$

La proporció entre l'àrea rosa i la blava és:

$$\frac{[rosa]}{[blava]} = \frac{\frac{\Phi^5}{1+\Phi^2}}{\frac{\Phi^3}{1+\Phi^2}} = \Phi^2$$

5120.- Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat saben que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és 1.
El segment $\overline{BD}$ mesura la meitat del semgnet $\overline{DE}$, i F és el punt mig del costat $\overline{EG}$



Solució:
Siga $\overline{BD} = a,\ \overline{CD} = 2a,\ \overline{AB} = b$

$\overline{EF} = \dfrac{1}{2}b$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és 1, aleshores:

$\overline{BC} = \dfrac{2}{a}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCD}, \overset{\Delta}{EFD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{b}{2}}{\frac{2}{a}} = \frac{2a}{a}$$

$ab = 8$
L'àrea del rectangle $ABEG$ és:
$S_{ABEG} = 3ab = 24$