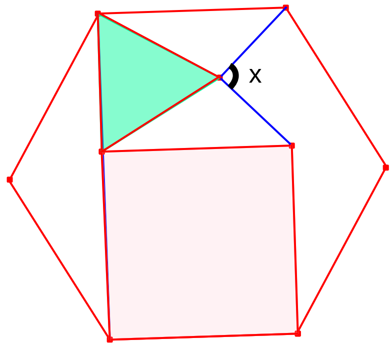
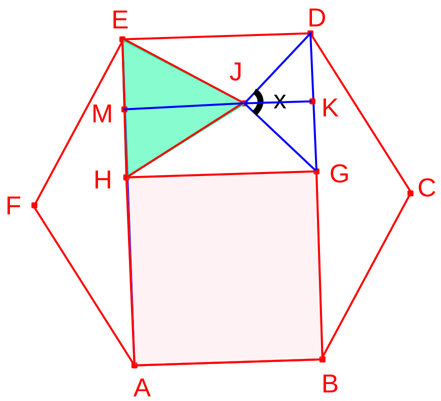
5121.- La figura està formada per un hexàgon regular, un quadrat i un triangle equilàter. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



AB=1

AE=sqrt(3)

EH=DG=sqrt(3)-1

els gtriangles EDJ, HGJ iguals

DJ=GJ

MJ=(3-sqrt(3))/2

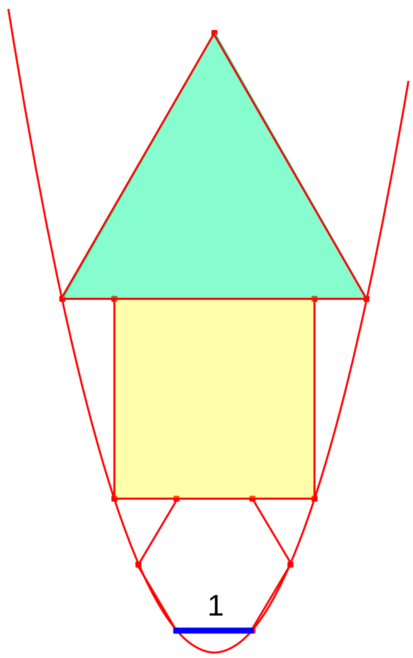
JK=1-MJ=(sqrt(3)-1)/2

KD=(1/2)DG=(sqrt(3)-1)/2

angleDJK=45º

x=90º

5122.- La figura està formada per una paràbola que conté un hexàgon regular de costat 1, un quadrat que conté dos vèrtexs en la paràbola i un triangle equilàter que conté dos vèrtexs en la paràbola.
Calculeu l'àrea del quadrat i del triangle equilàter.



Solució
Siga la paràbola de vèrtex en l'origen $y = ax^2$.
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$

$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}a\right)$

$\overline{OH} = \frac{1}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$B(1, a)$

$\frac{1}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{2} = a$

$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{BD} = \sqrt{3}$

$\overline{OU} = \frac{1}{4}a + \sqrt{3}$

Siga $\overline{UL} = x$

$\frac{1}{4}\frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$

$4x^2 = 7$

L'àrea del quadrat $KLMN$ és:

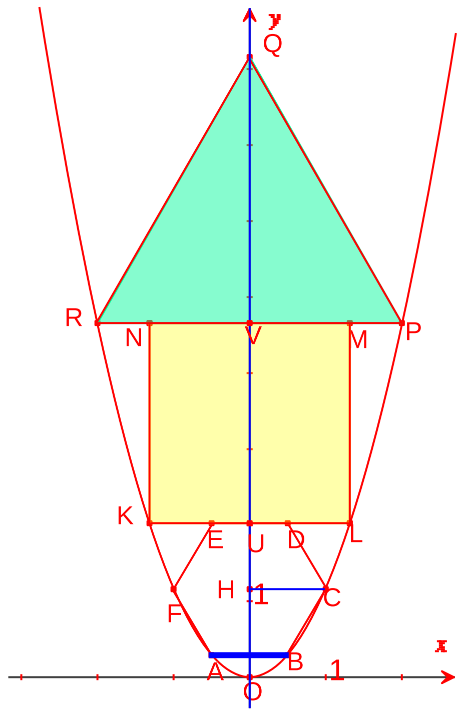
$S_{KLMN} = 4x^2 = 7$

$\overline{UV} = \sqrt{7}$

$\overline{OV} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \sqrt{3} + \sqrt{7}$

Siga $\overline{VP} = y$

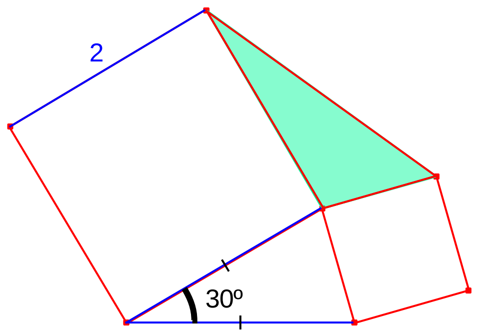
$\frac{\sqrt{3}}{6} + \sqrt{3} + \sqrt{7} = \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2$



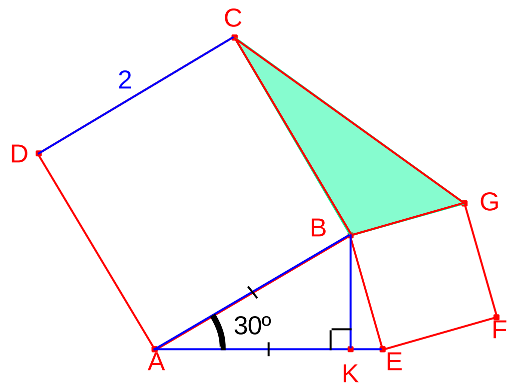
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ és:

$S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2y)^2 = \sqrt{3}y^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{7\sqrt{3}}{6} + \sqrt{7}\right) = \frac{7}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{7} \approx 6.9997$

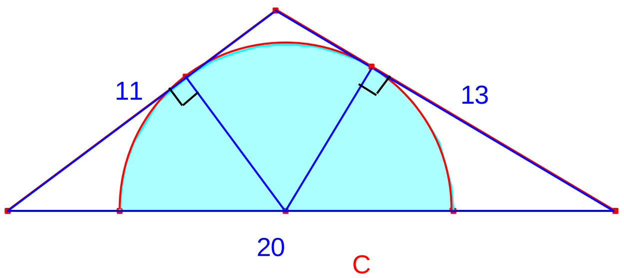
5123.- La figura està formada per dos quadrats.
El quadrat gran té costat 2.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



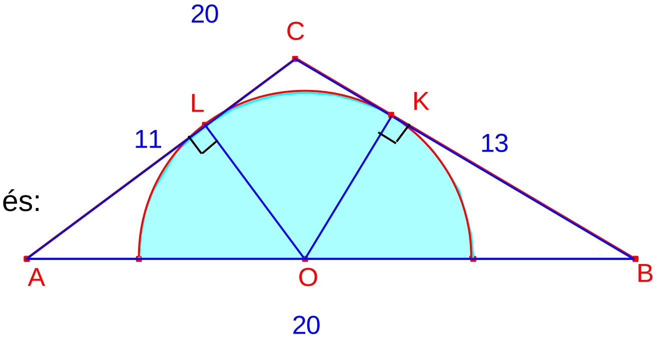
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
$\overline{AE} = \overline{AB} = 2, \overline{BG} = \overline{BE}$
Els angles $\angle CBG, \angle ABE$ són suplementaris.
Els triangles $\overset{\Delta}{BCG}, \overset{\Delta}{ABE}$ tenen la mateixa àrea.
$\overline{BK} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 1$
$s_{BCG} = S_{ABE} = \frac{1}{2}\overline{AE} \cdot \overline{BK} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$



5124.- El triangle de costats 11, 13, 20 té inscrit una semicircumferència. Calculeu l'àrea de la semicircumferència.



Solució 1:



Siga $\overline{CL} = \overline{CK} = a$

Siga $\overline{OL} = \overline{OK} = R$

Siguen $\alpha = \angle LAO, \beta = \angle KBO$

Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 9} = 66$

Aplicant la fórmula trigonomètrica l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 11 \cdot \sin\alpha = 66, \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}, \tan\alpha = \frac{3}{4},$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 13 \sin\beta = 66, \qquad \sin\beta = \frac{33}{65}, \tan\beta = \frac{33}{56},$

Aplicant roans trigonomètriques als triangles $\overset{\Delta}{ALO}, \overset{\Delta}{BKO}$

$\frac{R}{11-a} = \frac{3}{4}, \frac{R}{13-a} = \frac{33}{56}$

Resolent el sistema:

$R = \frac{11}{2}, a = \frac{11}{3}$

L'àrea del semicercle és:

$S_{semicercle} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{8}\pi$

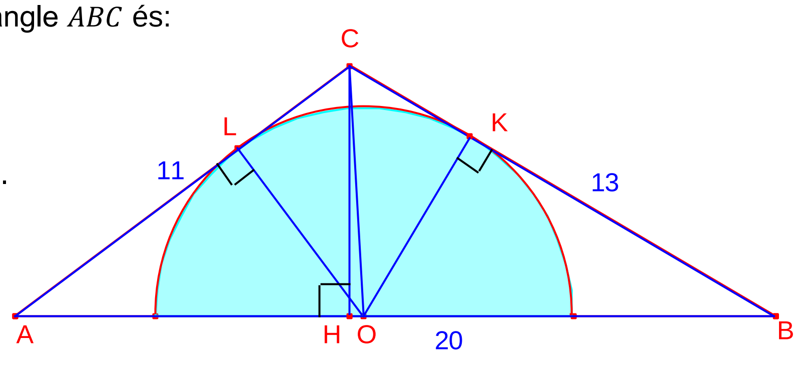
Solució 2:

Siga $\overline{OL} = \overline{OK} = R$, Siga $\overline{CH}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 9} = 66$

$S_{ABC} = 66 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \overline{CH}, \qquad \overline{CH} = \frac{33}{5}$



$\overline{CO}$ és bisectriu interior del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$\overline{AO} = 11k, \overline{BO} = 13k$

$24k = 20$

$k = \frac{5}{6}, \qquad \overline{AO} = \frac{55}{6}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ALO}, \overset{\Delta}{AHC}$ són semblants.

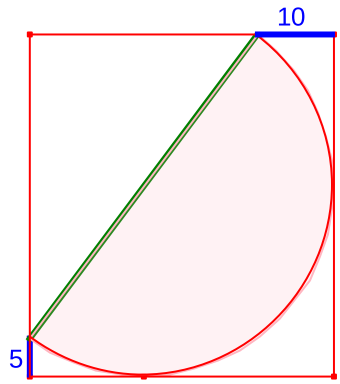
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{R}{\frac{33}{5}} = \frac{\frac{55}{6}}{11}, \qquad R = \frac{11}{2}$

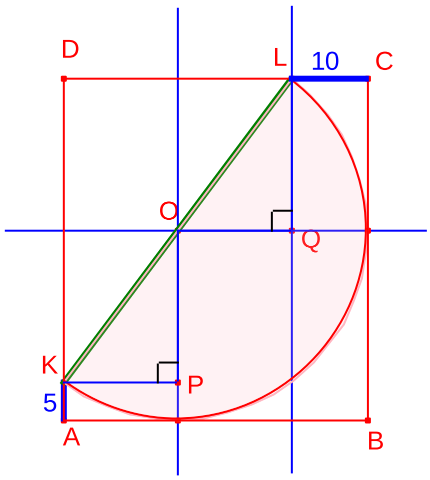
L'àrea del semicercle és:

$S_{semicercle} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{8}\pi$

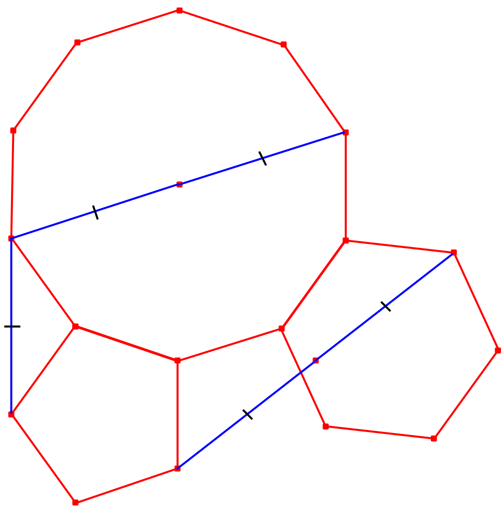
5125.- La figura està formada per un rectangle conté una semicircumferència.
Calculeu el diàmetre de la semi



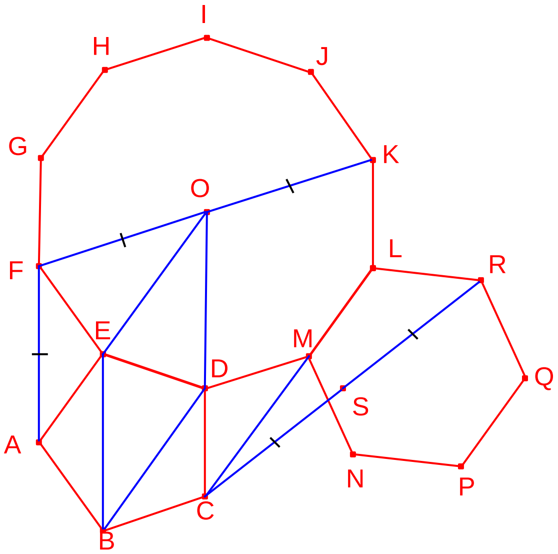
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OL} = r$
$\overline{OQ} = r - 10, \overline{LQ} = \sqrt{20r - 100}$
$\overline{OP} = r - 5$
Els triangles rectangles $K\overset{\Delta}{P}O, O\overset{\Delta}{Q}L$ són iguals.
$\sqrt{20r - 100} = r - 5$
Resolent l'equació:
$r = 25$
El diàmetre de la semicircumferència és:
$\overline{KL} = 50$



5126.- La figura està formada per un pentàgon, un decàgon i un hexàgon regulars.
Proveu que els 5 segments són iguals.



Solució:



Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el decàgon regular $DEFGHIJKLM$ de centre O

$\overline{OE} = \overline{BE} = \overline{OF} = \overline{AF} = \overline{OK} = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\overline{FK} = 2\Phi$

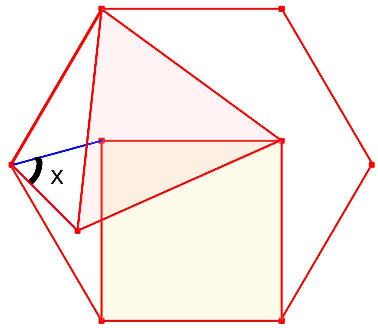
C, M, L alineats, $\overline{CM} = \Phi$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CLR}$:

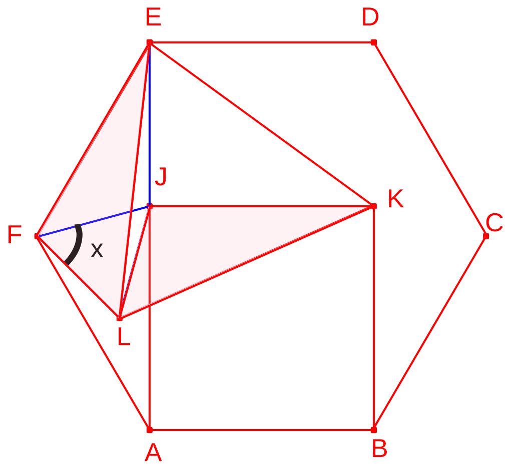
$\overline{CR}^2 = (1+\Phi)^2 + 1 + (1+\Phi) = 4 + 4\Phi = (2\Phi)^2$

$\overline{CR} = \overline{FK} = 2\Phi$

5127.- La figura està formada per un hexàgon regular, un quadrat i un triangle equilàter. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleJKE=angleDEK=a

angleFEL=angleJKL=60º-a

els triangles EFL, KJL són iguals

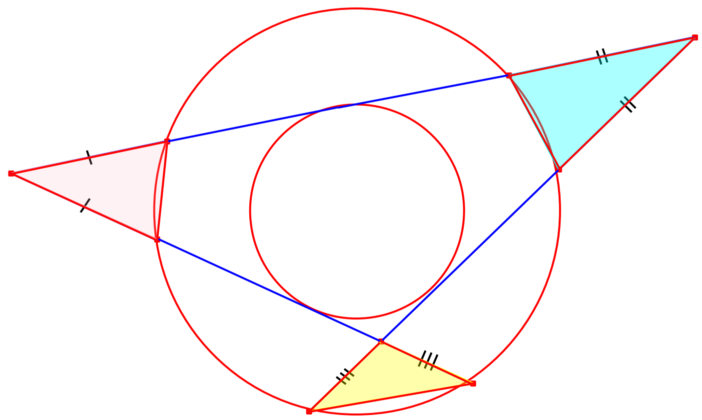
FL=LJ

angleKLE=60º

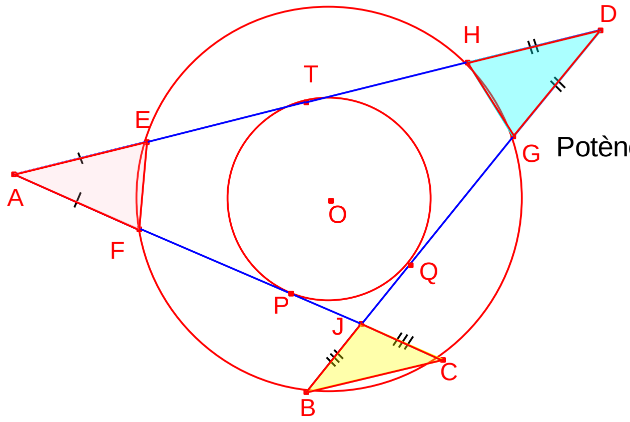
angleFLJ=60º

x=angleJFL=60º

5128.- La figura està formada per dues circumferències i tres rectes tangents a la circumferència interior que formen tres triangles isòsceles ombrejats.
Proveu que les dues circumferències són concèntriques.



Solució:



OT=r

AE=AF=x, DH=DG=y, JB=JC=z

ET=FP=a, HT=GQ=b, JF=JQ=c

Potència J respectee circumferència exterior

z(b+c)=z(a+c)

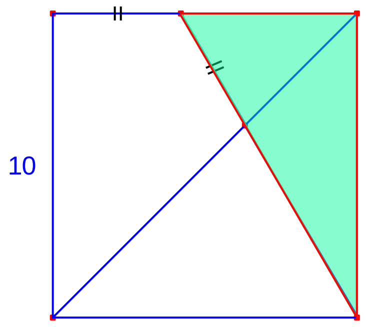
a=b

OE=OH

anàlogament OE=OC

O centre circumferència exterior

5129.- La figura està formada per un quadrat de costat 10 i dos segments.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siga $\overline{DJ} = \overline{KJ} = a$
$\overline{CJ} = 10 - a$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{CJK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{BK} = \frac{10a}{10-a}$$

$$\overline{BJ} = a + \frac{10a}{10-a} = \frac{20a - a^2}{10-a}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCJ}$:

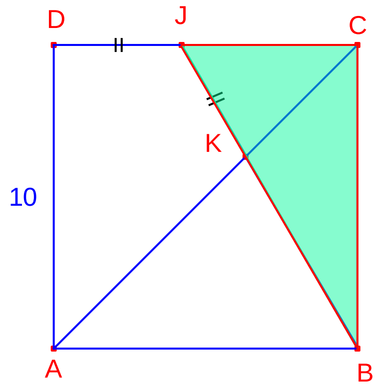
$$(10-a)^2 + 100 = \left(\frac{20a - a^2}{10-a}\right)^2$$

Simplificant:
$3a^2 - 60a + 200 = 0$
Resolent l'equació:

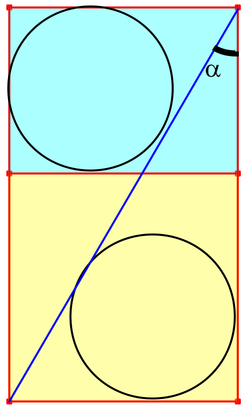
$$a = \frac{30 - 10\sqrt{3}}{3}$$

L'àrea del triangle ombrejat és:

$$S_{BCJ} = \frac{1}{2} \cdot 10\left(10 - \frac{30 - 10\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{50\sqrt{3}}{3}$$



5130.- La figura està formada per un quadrat groc i un rectangle blau amb dues circumferències inscrites iguals.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$ inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{DE} = 2r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{AC} = \sqrt{2c^2 + 4r^2 + 4cr}$
El radi de la circumferència inscrita és:
$$r = \frac{2c + 2r - \sqrt{2c^2 + 4r^2 + 4cr}}{2}$$
Simplificant:
$\sqrt{2c^2 + 4r^2 + 4cr} = 2c$
$2r^2 + 2cr - c^2 = 0$
Resolent l'equació:
$$\frac{r}{c} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\alpha = \frac{c}{c + 2r} = \frac{1}{1 + 2\frac{r}{c}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$\alpha = 30°$