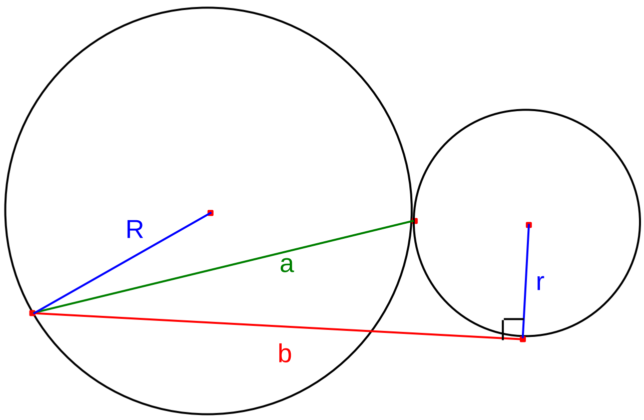
5141.- La figura està formada per dues circumferències tangents de radis R, r. Calculeu la proporció $a : b$ en funció dels radis R, r



Solució:

Siga $\angle AOT = \alpha$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$\overline{AP}^2 = r^2 + b^2$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AOT}$:

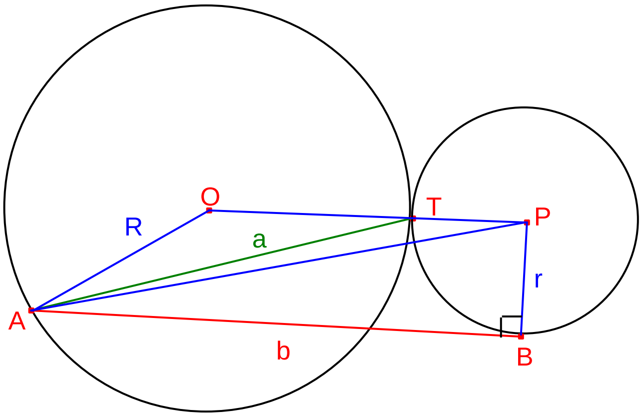
$$\cos\alpha = \frac{2R^2 - a^2}{2R^2}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AOP}$:

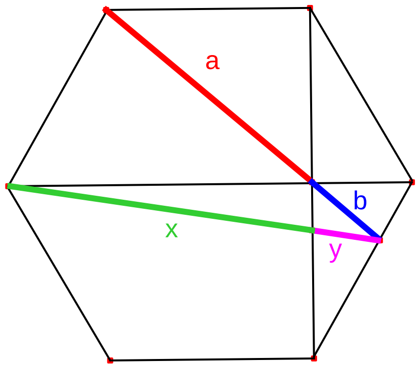
$$r^2 + b^2 = R^2 + (R + r)^2 - 2R(R + r)\cos\alpha$$

$$b^2 = \frac{R + r}{R}a^2$$

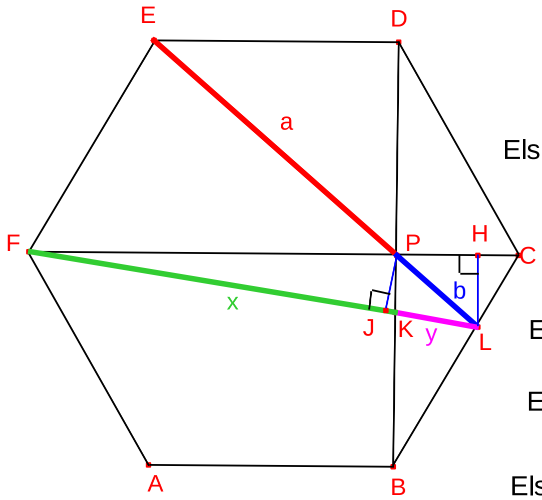
$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{R}{R + r}}$$



5142.- La figura està formada per un hexàgon regular.
Calculeu les proporcions $a : b$, $x : y$



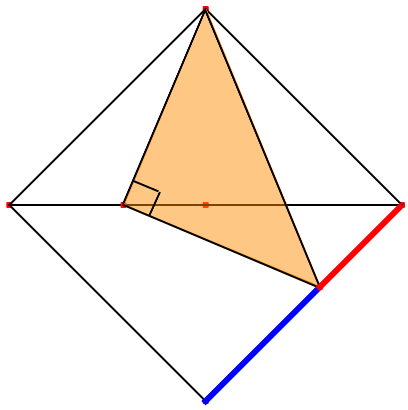
Solució:



AB=1
PC=1/2, FC=2
FP=3/2
Els triangles FPE, CPL són semblants i de raó 3 : 1
a : b = 3 : 1

CL=1/3
HC=1/6
PH=1/3
Els triangles FHL, FPK semblants i de raó 9 : 11
PK/HL=9/11
Els triangles FPK, FPL tenen la mateixa base FP
[FPK]/[FPL] = PK/HL=9/11
Els triangles FPK, FPL tenen la mateixa altura
[FPK]/[FPL] =x/(x+y)=9/11
2x=9y
x : y = 9 : 2

5143.- La figura està formada per un quadrat que conté un triangle rectangle amb el angle recte en la diagonal. Calculeu la proporció entre el segment blau i el segment roig.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ $\overline{AB} = 1$

Siga $\overline{DE} = \overline{BG}$

$\overline{CE} = \overline{CF}$

$\angle ECM = \angle MCG = \angle GEF$

$\angle CEF = \angle FBC = 90°$

El quadrilàter $EFBC$ inscriptible

$\angle BCF = \angle BEF$

$\angle BCF = \frac{45°}{2}$

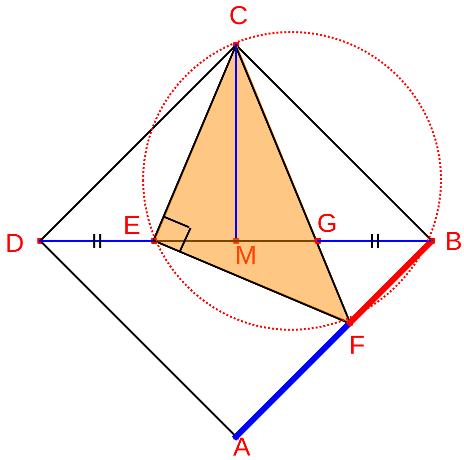
Siga $\overline{BF} = x$

$\frac{x}{1} = \tan\frac{45°}{2} = -1 + \sqrt{2}$

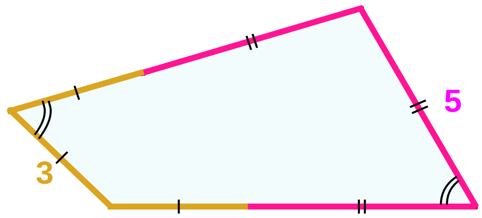
$\overline{AF} = 1 - x = 2 - \sqrt{2}$

La proporció és:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



5144.- Calculeu l'àrea del quadrilàter de la figura que té dos angles oposats iguals.



Solució:

Siga el quadrilàter $ABCD$ de costats $\overline{AB} = \overline{CD} = 8, \overline{BC} = 5, \overline{AD} = 3,\ B = D = \alpha$

Siga $\overline{AC} = b$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$b^2 = 64 + 9 - 48\cos\alpha$

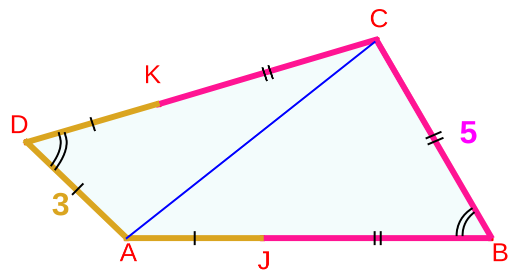
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$b^2 = 64 + 25 - 80\cos\alpha$

Restant ambdues expressions:

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$

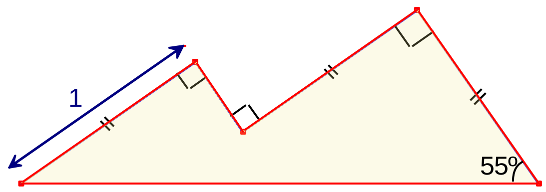
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$



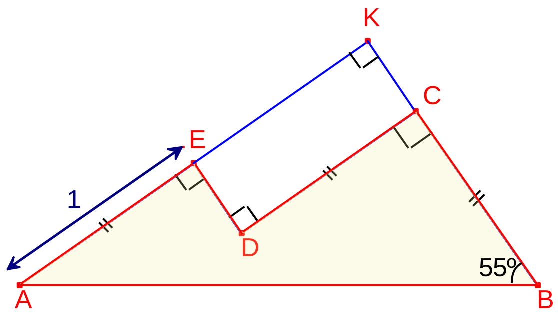
L'àrea del quadrilàter $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

5145.- Calculeu l'àrea del pentàgon de la figura.



Solució:

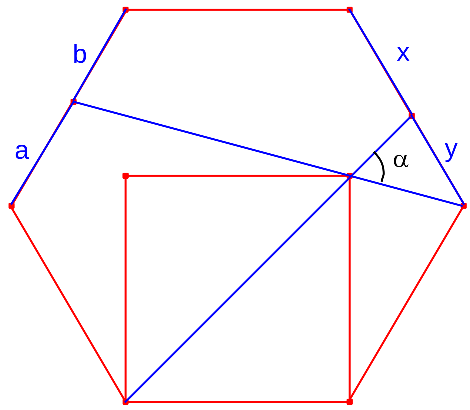


Siga el pentàgon $ABCDE$ $\overline{AE} = \overline{CD} = \overline{BC} = 1$
Siga K la intersecció de les rectes AE, BC.
Siga $\overline{DE} = \overline{CK} = a$

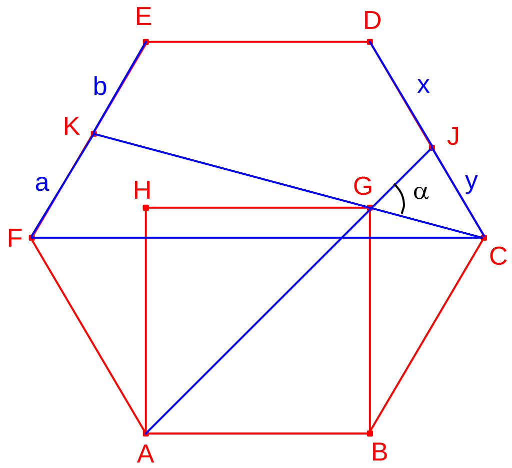
L'àrea del pentàgon $ABCDE$ és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABK}$ menys l'àrea del rectangle $CKED$.

$$S_{ABCDE} = S_{ABK} - S_{CKED} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 + a) - 1 \cdot a = 1$$

5146.- La figura està formada per un hexàgon regular i un quadrat.
Calculeu $a : b,\ x : y$ i la mesura de l'angle α

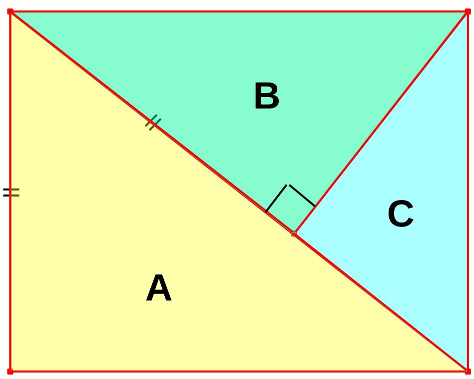


Solució:
Siga l'hexàgon regular ABCD de costat $\overline{AB} = 1$
$\angle GBC = 30°, \angle BGC = \angle BCG = 75°, \angle FCG = 15°, \angle GCJ = 45°$
$\alpha = \angle JGC = 180° - (45°° + 75°) = 60°$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{FCK}$:
$$\frac{a}{\sin 15°} = \frac{2}{\sin 75°}$$
$a = 4 - 2\sqrt{3}$
$b = 1 - a = 2\sqrt{3} - 3$
$$\frac{a}{b} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCG}$:
$$\overline{CG}^2 = 1 + 1 - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{GCJ}$:
$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sin 75°} = \frac{y}{\sin 60°}$$
$y = 2\sqrt{3} - 3$
$x = 4 - 2\sqrt{3}$
$a = x, b = y$
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5147.- La figura està formada per un rectangle que s'ha dividit en tres triangles.
Determineu la proporció $A : B : C$



Solució:
Siga el rectangle $KLMN$ de costats $\overline{KN} = \overline{NP} = a, \overline{KL} = b$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NKL}, \overset{\Delta}{MPN}, \overset{\Delta}{LPM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{PM} = \frac{a^2}{b}, \overline{PL} = \frac{a^3}{b^2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NKL}$:

$$\overline{LN} = \sqrt{a^2 + b^2} = a + \frac{a^3}{b^2}$$

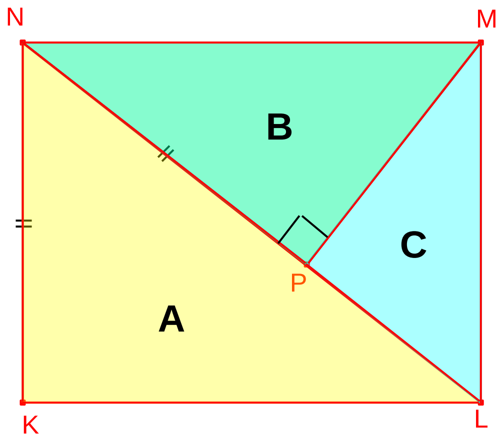
$$a^6 + 2a^2b^2 - b^6 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^4 + a^2b^2 - b^4) = 0$$

$$b^4 + a^2b^2 - a^4$$

Resolent l'equació:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

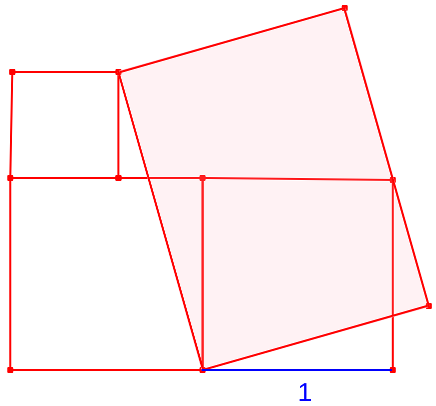


$$\frac{A}{B} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \Phi$$

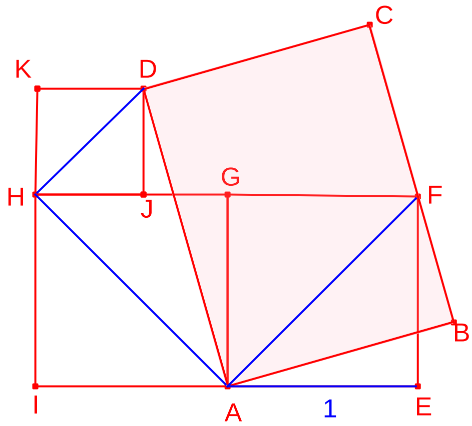
$$\frac{B}{C} = \frac{a}{\frac{a^3}{b^2}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \Phi$$

$$A : B : C = \Phi^2 : \Phi : 1$$

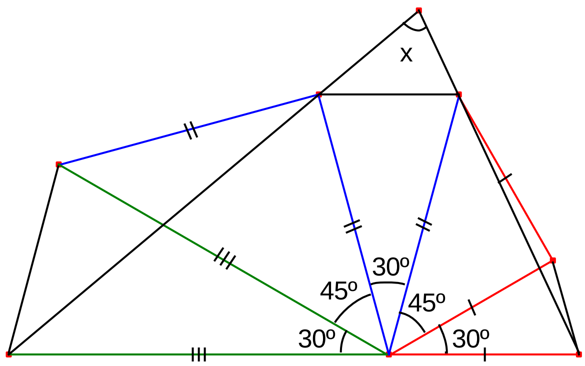
5148.- La figura està formada per un rectangle ombrejat i tres quadrats, dos d’ells iguals de costat 1.
Calculeu l’àrea del rectangle.



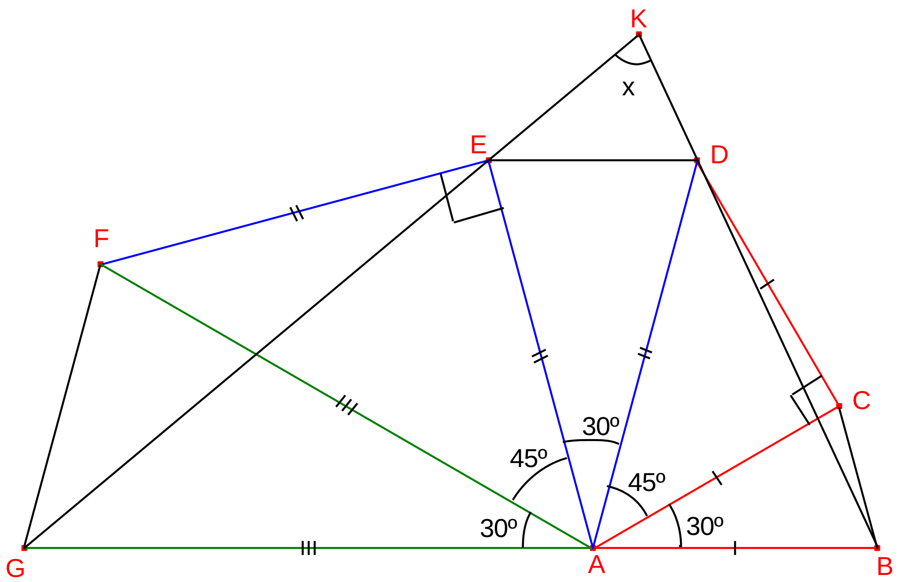
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AB} = x, \overline{AD} = y$
Siguen el quadrat $AEFG, AGHI$ de costat $\overline{AE} = 1$
$\overline{AF} = \overline{AH} = \sqrt{2}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABF}, \overset{\Delta}{AHD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{y}$$
L’àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} 0xy = 2$



5149.- En la figura calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



AB=AC=CD=1

AC=AD=EF=sqrt(2)

AF=AG=2

Els triangles ABD, AEG són semblants

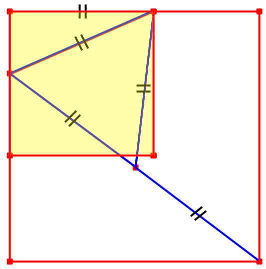
angleADB=angleAGE=a

angleABD=angleAEG=105º-a

angleKED=a, angleKDE=105º-a

x=75º

5150.- La figura està formada per dos quadrats i un triangle equilàter.
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = a$

Siga el triangle equilàter $G\overset{\Delta}{K}M$ de costat $\overline{KM} = c$
Siguen $\overline{DK} = x, \angle ABK = \alpha$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $K\overset{\Delta}{A}B$:
$4c^2 = (1-x)^2 + 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $K\overset{\Delta}{D}G$:
$$a^2 = c^2 - x^2 = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$\angle DKG = 30° + \alpha$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $K\overset{\Delta}{D}G$:
$$\frac{x}{c} = \cos(30° + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2c} - \frac{1}{2}\frac{1-x}{2c}$$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{3}$$
L'àrea del quadrat $DEFG$ és:
$$S_{DEFG} = a^2 = x^2 + c^2 = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{DEFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3}$$