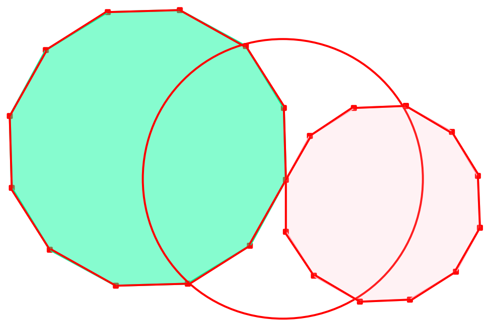
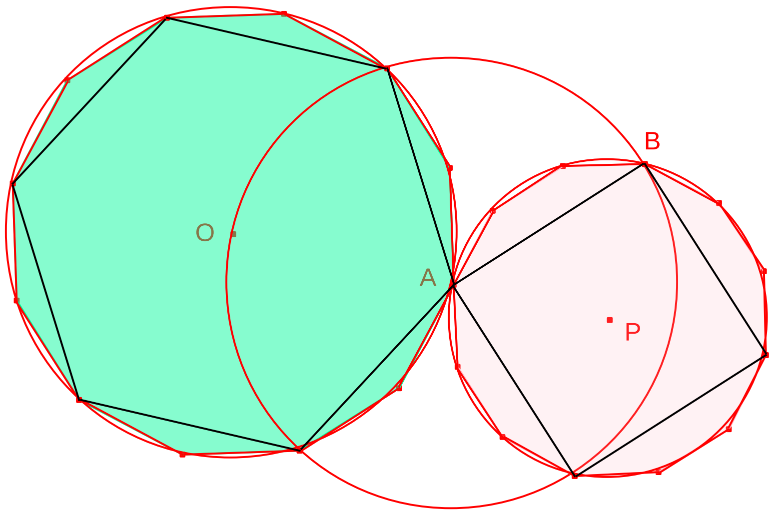
Problemes de Geometria per a l’ESO 517

5161.- La figura està formada per dos dodecàgons regulars que tenen un vèrtex comú i una circumferència de centre el vèrtex comú.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos dodecàgons regulars.



Solució:



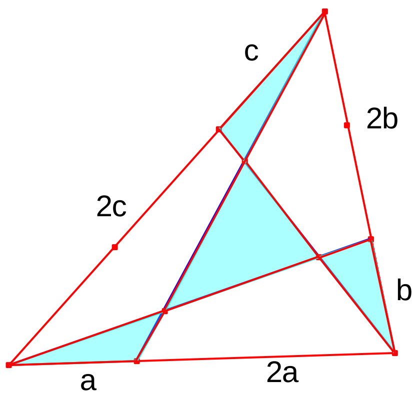
OA=AB=R

PA=r

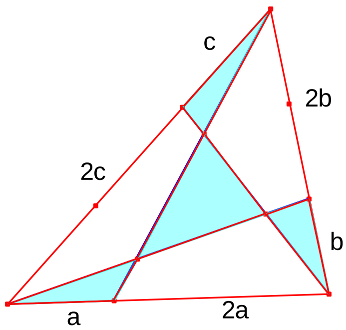
r=sqrt(2)/2

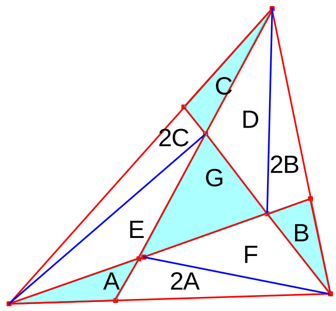
[verd]/[rosa]=(R/r)²=2

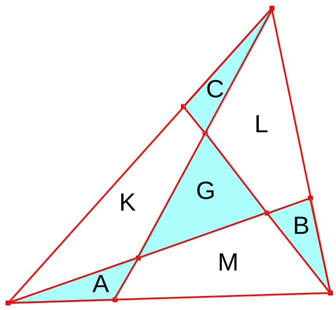
5162.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle exterior.



Solució:







G+E=2D

G+F==2E

G+D=2F

3G=D+E+F

G+K+L+C=2A+2M+2B

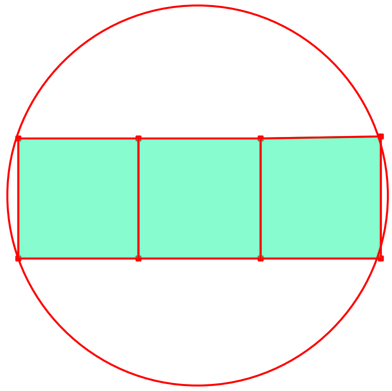
G+K+M+A=2C+2B+2L

G+L+M+B=2C+2A+2K

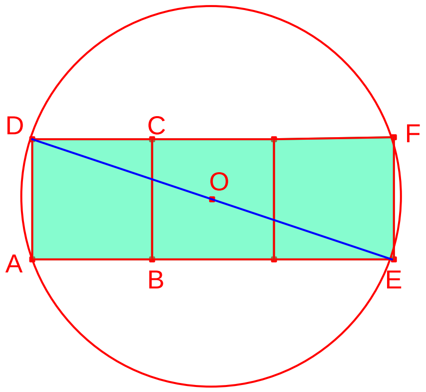
G=A+B+C

(A+B+C+G) / (3A+3B+3C+G+D+E+F) = 2/7

5163.- La figura està formada per una circumferència i tres quadrats.
Calculeu la proporció ente el costat del quadrat i el radi de la circumferència.
Generalitzeu el problema per a n quadrats.

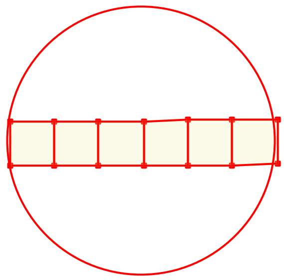


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = \overline{AD} = c$
$\overline{AE} = 3c$
$\angle DAE = 90°$
$\overline{DE}$ és diàmetre de la circumferència.
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OE} = R$

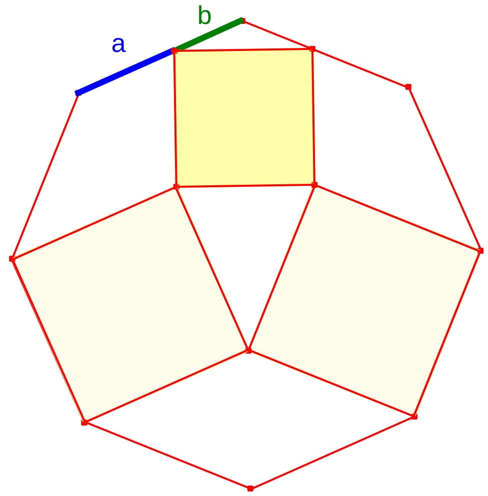


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAE}$:
$4R^2 = c^2 + 9c^2$
$\frac{c}{R} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

Generalització:
$\frac{c}{R} = \frac{2}{\sqrt{1+n^2}}$



5164.- La figura està formada per un octògon regular i tres quadrats. Determineu la proporció $a : b$



Solució:
Siga l'octàgon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = 1$
$\angle JHA = \angle FGN = \angle JBA = \angle NJK = 45°$
$\angle FNM = 45°, \overline{FN} = \overline{NM} = \overline{NK}$
NKLM és un quadrat.
Siga $\overline{AJ} = \overline{HK} = c$
Els triangles $\overset{\Delta}{JKN}, \overset{\Delta}{NMF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{1}$$

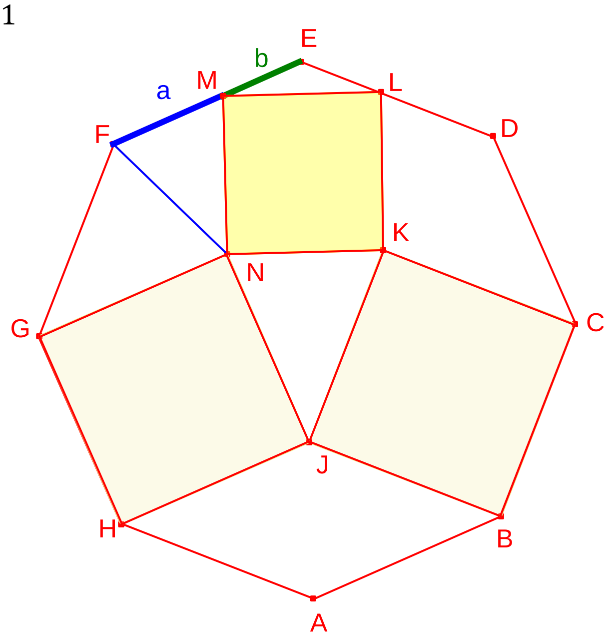
$$a = c^2$$

$$b = 1 - a = 1 - c^2$$

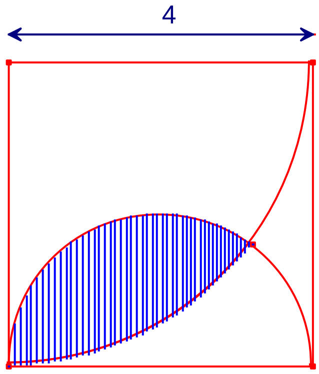
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JKN}$:

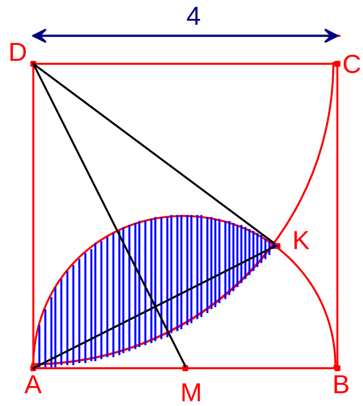
$$c^2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c^2}{1 - c^2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}$$



5165.- La figura està formada per un quadrat de costat 4, una semicircumferència i un quadrant.
Calculeu l'àrea de la intersecció del quadrant i del semicercle.





Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siga K la intersecció de la semicircumferència i del quadrant.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$, centre de la semicircumferència.
Siga $\alpha = \angle ADM$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$

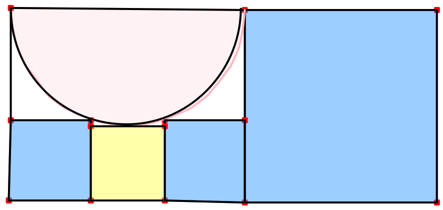
$\tan 2\alpha = \frac{4}{3}, \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

L'àrea ombrejada és:

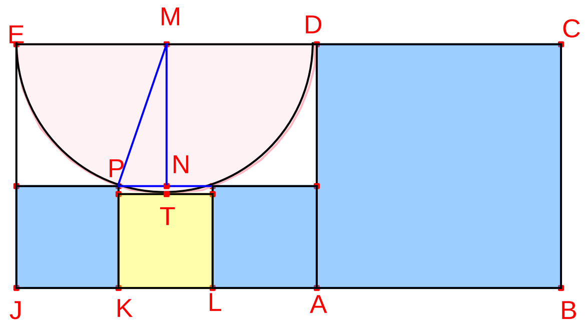
$$S_{ombrejada} = \left(\frac{\arctan\frac{4}{3}}{2}4^2 - \frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{4}{5}\right) + \left(\left(\frac{\pi - \arctan\frac{4}{3}}{2}\right)2^2 - \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{4}{5}\right) =$$

$$= 2\pi + 6\cdot\arctan\frac{4}{3} - 8 \approx 3.8470$$

5166.- La figura està formada per quatre quadrats i una semicircumferència
Calculeu la proporció entre el total de l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:



$AB=1$

$KL=a$, $JK=LA=b$

$DE=2\cdot MT=2(1-a)$

$DE=a+2b$

$3a+2b=2$

$MN=1-b$

$PN=a/2$, $MP=1-a$

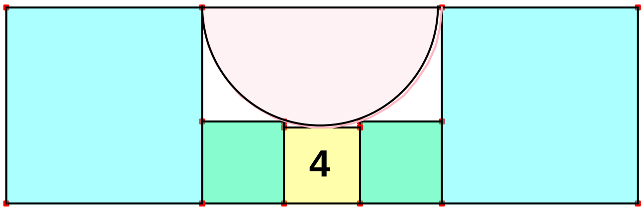
Teorema Pitàgores PNM

$3a^2-8a=9a^2-4$

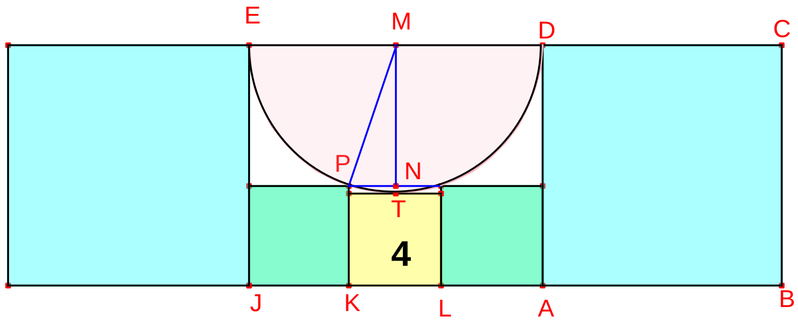
$a=(-2+\text{sqrt}(10))/3$, $b=(4-\text{sqrt}(10))/2$

$[\text{Blau}]/[\text{Groc}]=(1+2b^2)/a^2=9$

5167.- La figura està formada per cinc quadrats i una semicircumferència.
El quadrat menut té àrea 4.
Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:



KL=2, JK=LA=a, AB=b

DE=2·MT=b-2

DE=2a+2

b=3+a

MN=b-a

PN=1, MP=a+1

Teorema Pitàgores PNM

$(a+1)^2=1+(b-a)^2$

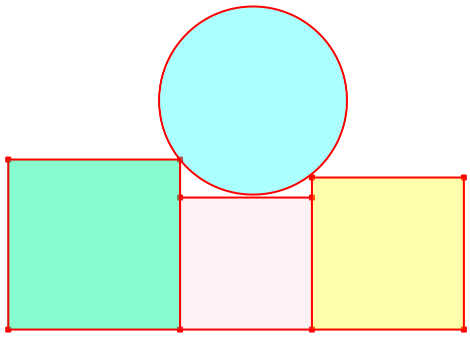
$3a^2-6a+1=0$

a=-1+sqrt(10)

ME=sqrt(10)

[Semicercle]=5·Pi

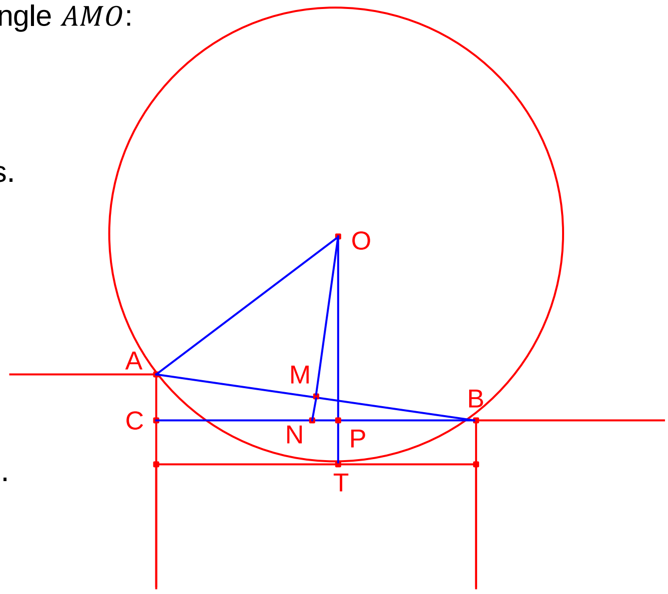
5168.- La figura està formada per tres quadrats de costats 7, 8, 9 i una circumferència.
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OT} = r$
$\overline{AC} = 1, \overline{BC} = 7, \overline{AB} = 2\sqrt{5}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$$\overline{OM} = \sqrt{r^2 - \frac{25}{2}}$$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACB}, \overset{\Delta}{NMB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{MN} = \frac{5\sqrt{2}}{14}$$

$$\overline{ON} = \frac{5\sqrt{2}}{14} + \sqrt{r^2 - \frac{25}{2}}$$

$$\overline{OP} = r - 1$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACB}, \overset{\Delta}{NPO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

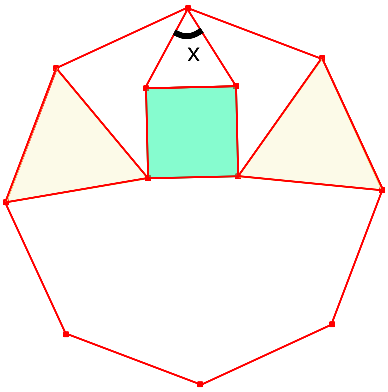
$$\frac{r - 1}{\frac{5\sqrt{2}}{14} + \sqrt{r^2 - \frac{25}{2}}} = \frac{7}{2\sqrt{5}}$$

Simplificant:

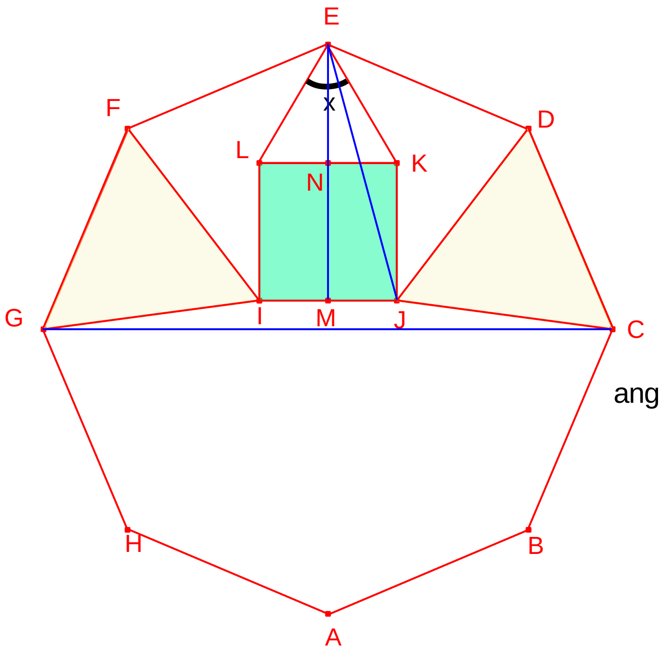
$$r^2 - 150r + 725 = 0$$

$$r = 5$$

5169.- La figura està formada per un octògon regular que conté dos triangles equilàters ombrejats i un quadrat.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleJCG=135º/2-60º=15º/2

angleIJC=180º-15º/2=345º/2

angleEDJ=75º

angleEJD=(180º-75º)2=105º/2

angleIJE=360º-(315º/2+105º/2+60º)=75º

IJ=c, EN=d

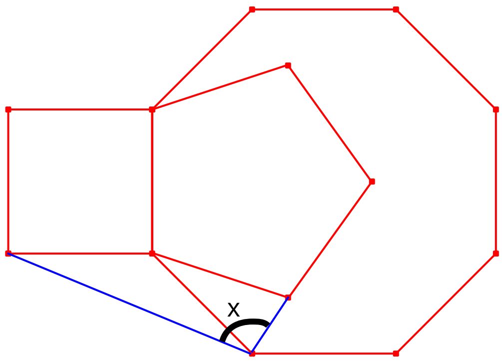
2(c+d)/c=tan75º=2+sqrt(3)

d=sqrt(3)/2·c

angleJKE=60º

x=60º

5170.- La figura està formada per un quadrat, un pentàgon i un octògon regular.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

$\angle ABH = 135°$

$\angle GBH = 360° - (135° + 90° + 108°) = 27°$

$\angle BHG = \dfrac{153°}{2}$

$\angle AHB = \dfrac{45°}{2}$

$x = \angle AHG = 99°$