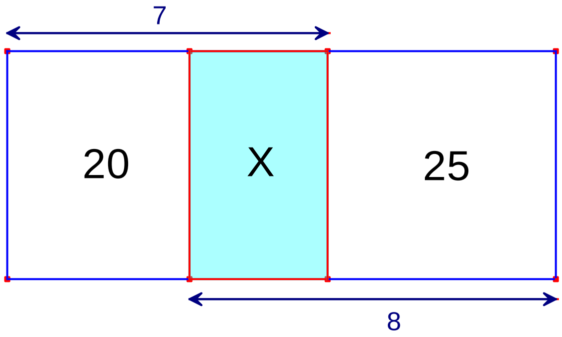
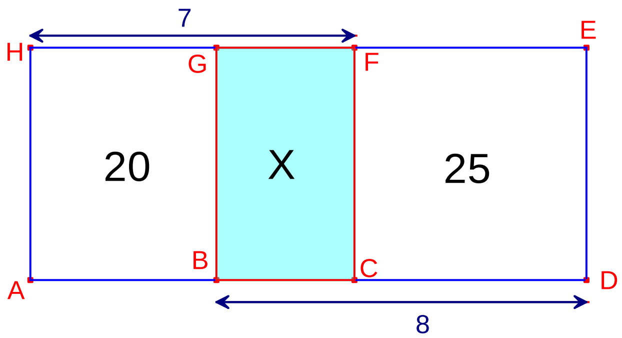
5181.- El rectangle de la figura s'ha dividit en tres rectangles.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat d'àrea X



Solució:



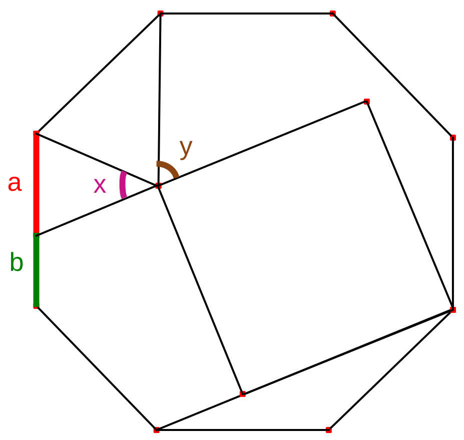
Els rectangles $ACFH, BDEG$ tenen la mateixa altura.
Les àrees són proporcionals a les bases:

$$\frac{20+X}{25+X}=\frac{7}{8}$$

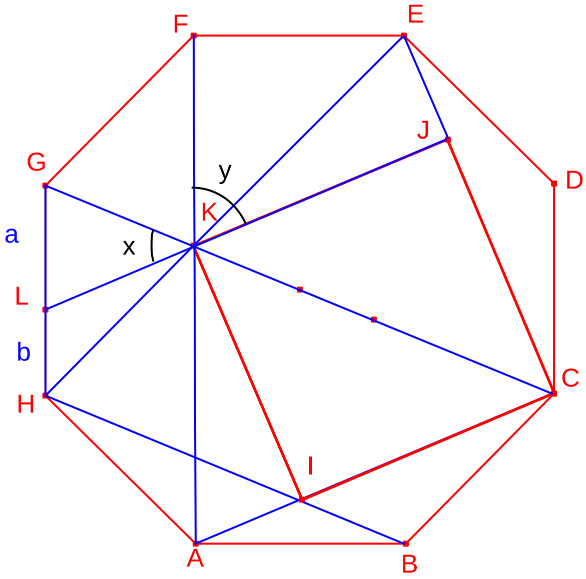
Resolent l'equació:

$X=15$

5182.- La figura està formada per un octògon regular i un quadrat.
Calculeu la proporció $a : b$, i les mesures dels angles x, y



Solució:



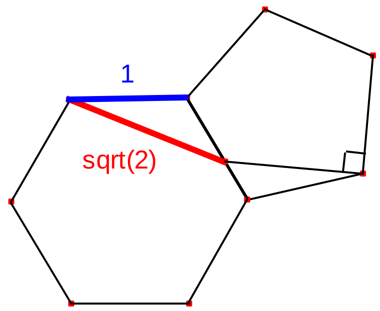
CG mediatriu del segment IJ
angleCIB=angleAIH=45º
HI=IK=IC
angleHIK=45º
angleKHI=angleHKI=135º/2
angleGHK=45º
H, K, E alineats
angleAKI=angleHKA-45º=45º/2
angleKAC=135º/2

A, K, F alineats
C, J, E alineats
y=360º-(90º+225º/2+90º)=135º/2
x=angleJKC=45º

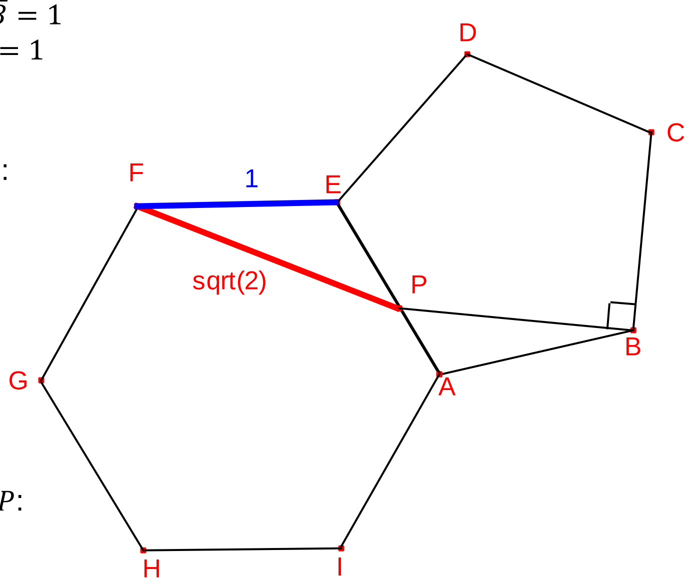
angleGHK=angleLKG=45º
GL=a, LH=b, a+b=c
d=GH
Els triangles GKH, GLK semblants
c/d = d/b
d^2=(2-sqrt(2))·c^2
b=(sqrt(2)-1)·c, a=(2-sqrt(2))·c

a/b=sqrt(2)

5183.- La figura està formada per un pentàgon regular i un hexàgon regular de costat 1.
Proveu que la mesura del segment roig és $\sqrt{2}$



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga l'hexàgon regular $EFGHIA$ de costat $\overline{EF} = 1$



$\angle PBA = 18°, \angle APB = 54°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\frac{\overline{AP}}{\sin 18°} = \frac{1}{\sin 54°}$$

$$\overline{AP} = \frac{\sin 18°}{\sin 54°} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{\frac{1}{2\Phi}}{\frac{\Phi}{2}} = \frac{1}{\Phi^2} = 2 - \Phi$$

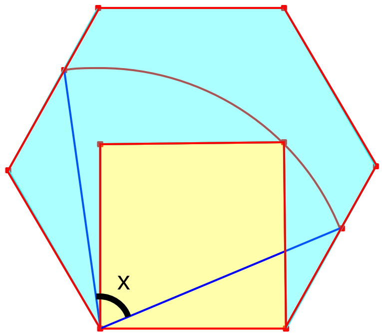
$$\overline{EP} = -1 + \Phi = \frac{1}{\Phi} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{FEP}$:

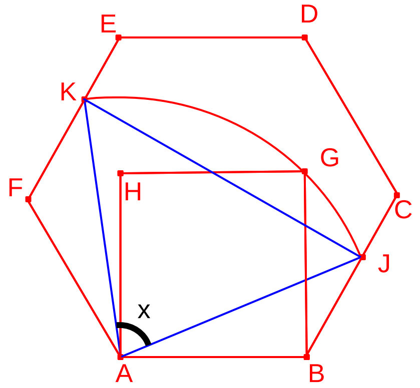
$$\overline{FP}^2 = 1 + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} = 2$$

$$\overline{FP} = \sqrt{2}$$

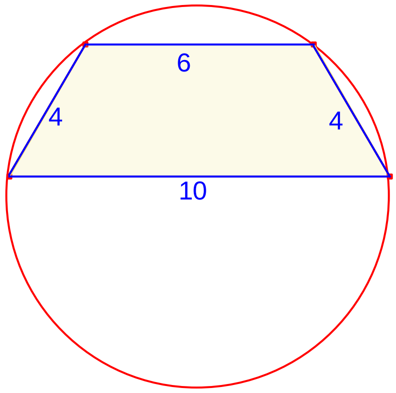
5184.- La figura està formada per un hexàgon regular, un quadrat i un arc.
Calculeu $\cos x$



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
$\overline{AG} = \overline{AJ} = \sqrt{2}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABJ}, \overset{\Delta}{AFK}$ són iguals
$\overline{BJ} = \overline{FK} = x, \overline{JK} = \overline{BF} = \sqrt{3}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AJK}$:
$3 = 2 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2}\sqrt{2} \cdot \cos x$
$\cos x = \dfrac{1}{4}$



5185.- En la figura calculeu la mesura del radi de la circumferència.

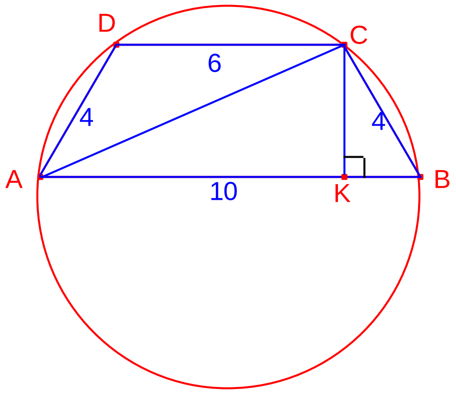


Solució:
Siga R el radi de la circumferència.
El quadrilàter $ABCD$ és un trapezi isòsceles.
Siga K la projecció de C sobre $\overline{AB}$
$\overline{BK} = 2, \overline{AK} = 8$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKB}$:
$\overline{CK} = 2\sqrt{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKC}$:
$\overline{AC} = 2\sqrt{19}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

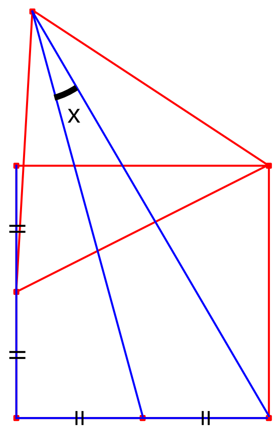
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{19}}{4R}$$

Resolent l'equació:

$$R = \frac{2\sqrt{57}}{3}$$

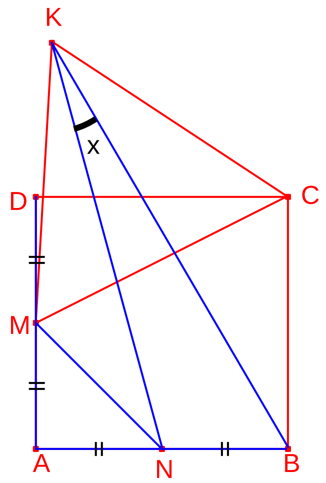


5186.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CKM}$ de costat $\overline{CM} = \sqrt{5}$
Siga $\alpha = \angle DCM$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



Siguen $\overline{KB} = a, \overline{KN} = b$
$\angle KCB = 150° - \alpha, \angle KMN = 105° + \alpha$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KCB}$:
$a^2 = 5 + 4 - 2\sqrt{5}\cdot 2\cdot\cos(150° - \alpha)$
$a^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

$\overline{MN} = \sqrt{2}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KMN}$:
$b^2 = 5 + 2 - 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(105° + \alpha)$
$b^2 = 6 + 3\sqrt{3}$

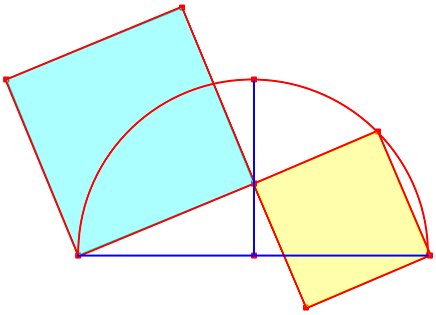
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{NKB}$:

$$1 = 6 + 3\sqrt{3} + 7 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{78 + 45\sqrt{3}}\cdot\cos x$$

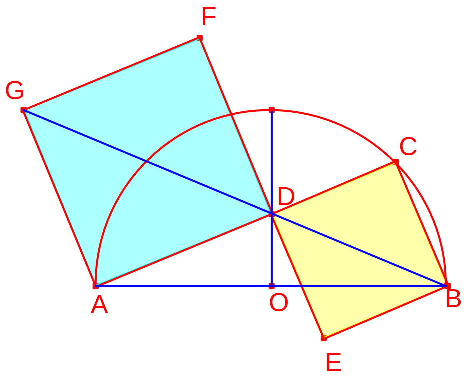
$$\cos x = \frac{12 + 7\sqrt{3}}{2\sqrt{78 + 45\sqrt{3}}} = \frac{12 + 7\sqrt{3}}{5\sqrt{6} + 9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$x = 15°$

5187.- La figura està formada per dos quadrants i dos quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:



BC=1

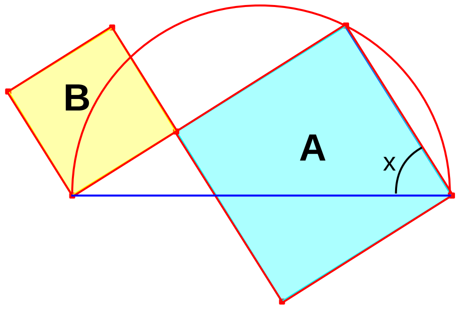
A, D, C, alineats

B, D, G alineats

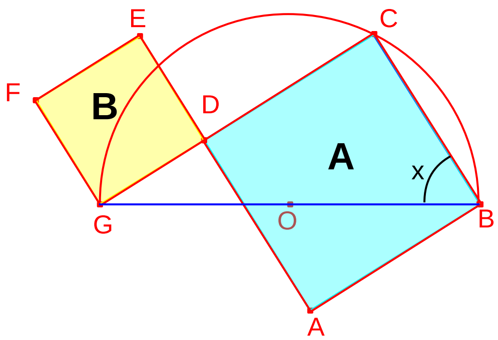
BD=AD=sqrt(2)

[ADFG]/[BCDE]=2

5188.- La figura està formada per una semicircumferència i dos quadrats d'àrees A, B.
Si la suma d'àrees $A+B$ és mínima, calculeu $\tan x$



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OB}=\overline{OG}=1$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB}=a$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE}=b$
Els punts G, D, C estan alineats.



$$\tan x=\frac{a+b}{a}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GCB}$:

$$b^2+2ab+a^2=4$$

$$b=-a+\sqrt{4-a^2}$$

La suma de les àrees del quadrats és:

$$A+B=a^2+b^2=4+a^2-2\sqrt{4a^2-a^4}$$

Siga $S(a)=4+a^2-2\sqrt{4a^2-a^4}$

$$S'(a)=2a-\frac{8a-4a^2}{\sqrt{4a^2-a^4}}$$

$$S'(a)=0$$

$$a^2=\frac{10-2\sqrt{5}}{5}$$

$$S''\left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\right)>0$$

El mínim de la suma d'àrees s'assoleix quan $a=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$

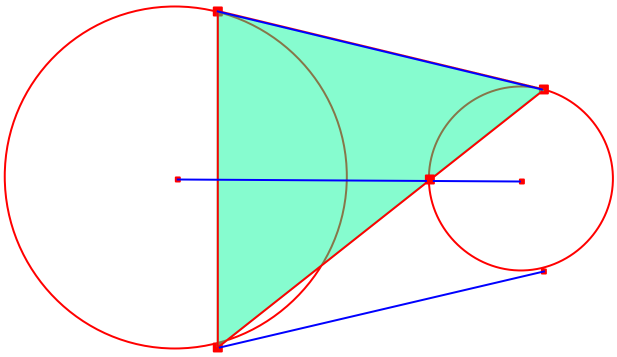
$$a+b=\sqrt{4-a^2}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\tan x=\frac{a+b}{a}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

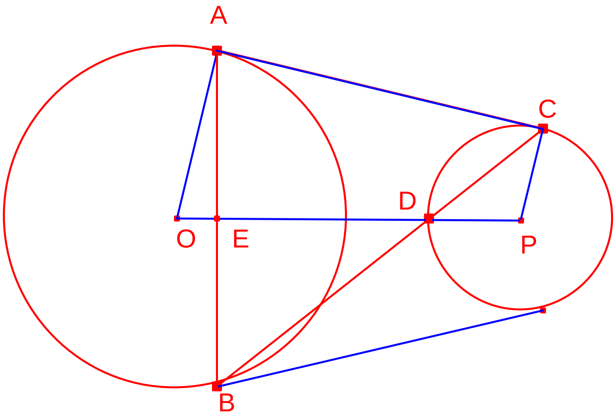
Notem que en aquest cas:

$$\frac{a}{b}=\Phi$$

5189.- La figura està formada per dues circumferències i dues tangents exterior comunes.
Demostreu que el triangle ombrejat és isòsceles.



Solució:



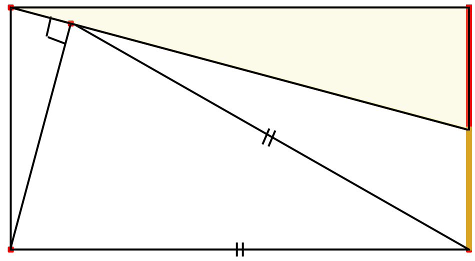
angleCDP=angleDCP=x

angleAEP=90º

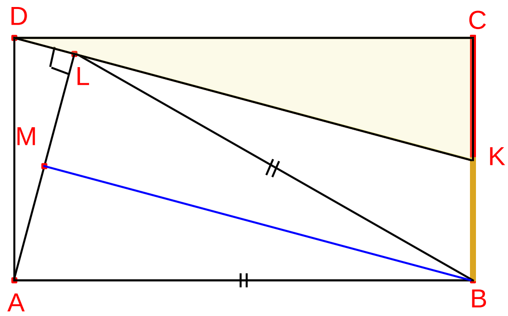
anglePCA=90º

angleABD=angleACB=90º-x

5190.- La figura està formada per un rectangle i tres segments.
Calculeu la proporció entre el segment roig i el segment groc.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$
Siguen, $\overline{AB} = \overline{BL} = 1, \overline{CK} = a, \overline{BK} = b$
Siga M el punt mig del segment $\overline{AL}$
Siga $\overline{AM} = x$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMB}, \overset{\Delta}{KCD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\overline{AL} = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DLA}, \overset{\Delta}{KCD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}}{a+b} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

Simplificant:
$2a = a + b$
$a = b$
$a : b = 1 : 1$