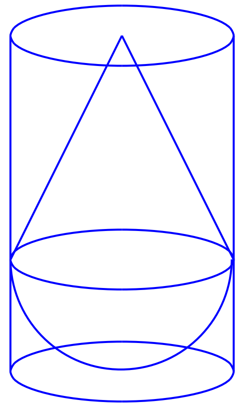
Problemes de Geometria per a l'ESO 52

511.- El joguet format per una semiesfera de plom i un con que tenen les cares circulars coincidents està embolicat amb un cartró cilíndric el més menut possible.
Si el volum de la semiesfera i del con són iguals, calculeu la raó entre la suma del volum de l'esfera i el con i la del cilindre.



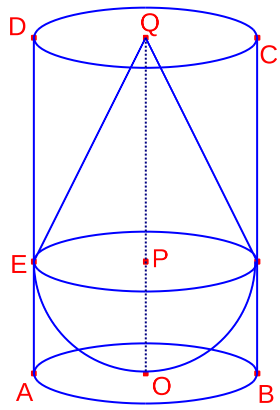
Solució:

Siga P el centre de la semiesfera i $r = \overline{PE}$ el radi.
Siga O el punt de tangència de la semiesfera i la base del cilindre.
$\overline{OP} = \overline{OA} = \overline{AE} = r$.
Siga $h = \overline{PQ}$ altura del con.
El volum de la semiesfera és:

$$V_s = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3.$$

El volum del con és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$



L'àrea de la semiesfera i el con són iguals, aleshores:

$$\frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 h.$$

Aleshores, $h = 2r$.

L'altura del cilindre és $\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} = 3r$.
El volum del cilindre és:

$$V_{cil} = \pi r^2 \cdot 3r = 3\pi r^2.$$

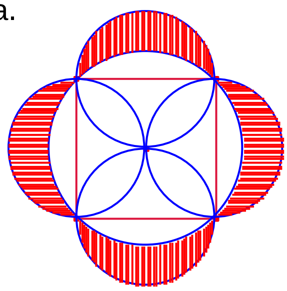
La suma dels volums de la semiesfera i del con és el doble de la semiesfera:

$$V = 2\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

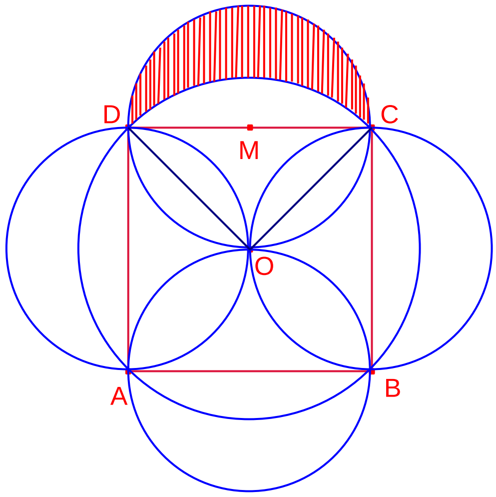
La raó entre la suma del volum de l'esfera i el con i la del cilindre és:

$$\frac{V}{V_{cil}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{3\pi r^3} = \frac{4}{9}.$$

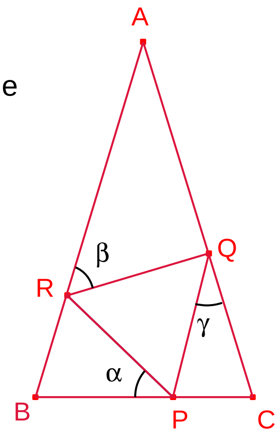
512.- En la figura hi ha un quadrat inscrit en una circumferència. Sobre els costats del quadrat com diàmetre es dibuixen quatre circumferències.
Determineu la raó entre la suma de les àrees de les quatre zones ratllades i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=2a$.
L'àrea del quadrat ABCD:
$S_{ABCD}=4a^2$.
Siga O el centre del quadrat.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCD}$:
$\overline{OC}=a\sqrt{2}$.



Calculem l'àrea d'una de les regions ratllades (lúnula).
L'àrea de la lúna és igual a l'àrea d'un semicercle de radi $a=\overline{MC}$, menys un quadrant de radi $\overline{OC}=a\sqrt{2}$, més l'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCD}$.
L'àrea de la lúnula és:
$$S_{\text{lúnula}}=\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{1}{4}\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=a^2.$$
La suma de l'àrea de les quatre lúnules és:
$$S_{\text{ratllada}}=4S_{\text{lúnula}}=4a^2.$$
La raó entre suma de les àrees les quatre zones ratllades i l'àrea del quadrat és:
$$\frac{S_{\text{ratllada}}}{S_{ABCD}}=\frac{4a^2}{4a^2}=1.$$



513.- Donat el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=\overline{AC}$ inscrivim el triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ P en el costat $\overline{BC}$, Q en $\overline{AC}$ i R en $\overline{AB}$, tal que $\alpha=\angle BPR$, $\beta=\angle ARQ$, $\gamma=\angle CQP$.
Determina la relació de l'angle α en funció de β, γ.

Solució:

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ isòsceles $B=C$.

$\angle BRP = 120^o - \beta$.

$\angle QPC = 120^o - \alpha$.

$B + \angle BRP + \alpha = 180^o$.

$C + \angle QPC + \gamma = 180^o$.

Aleshores:

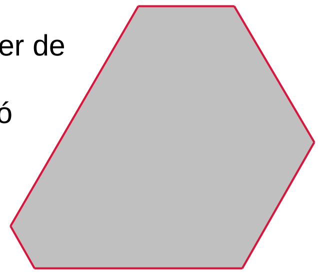
$\angle BRP + \alpha = \angle QPC + \gamma$.

$120^o - \beta + \alpha = 120^o - \alpha + \gamma$.

Resolent l'equació en la incògnita α:

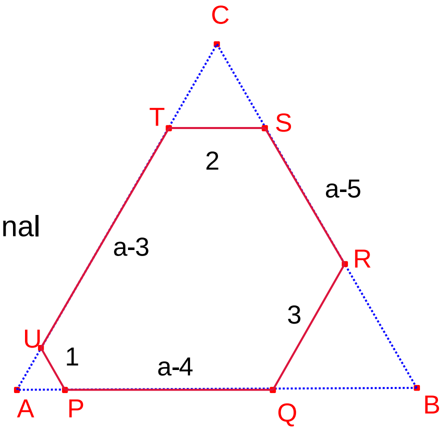
$$\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

514.- L'hexàgon de la figura està format retallant 3 triangles equilàter de costats, 1, 2, 3, respectivament d'un triangle equilàter més gran.
Els perímetres de l'hexàgon i del triangle original estan en proporció 5:7.
Determineu la proporció entre les àrees de l'hexàgon i del triangle original.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle original d costat $a=\overline{AB}$.
Siga PQRSTU l'hexàgon. Aleshores l'hexàgon té costats:
$\overline{PU}=1$, $\overline{TS}=2$, $\overline{QR}=3$.
$\overline{PQ}=a-4$, $\overline{RS}=a-5$, $\overline{TU}=a-3$.



El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 3a.
El perímetre de l'hexàgon PQRSTU és $3a-6$.
La proporció dels perímetres de l'hexàgon de del triangle original és 5:7, aleshores:
$\frac{3a-6}{3a}=\frac{5}{7}$. Resolent l'equació:
$a=7$.
L'àrea del triangle equilàter original és:

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

L'àrea de l'hexàgon PQRSTU és igual a l'àrea del triangle equilàter de costat a menys les àrees dels triangles de costats 1, 2, 3:

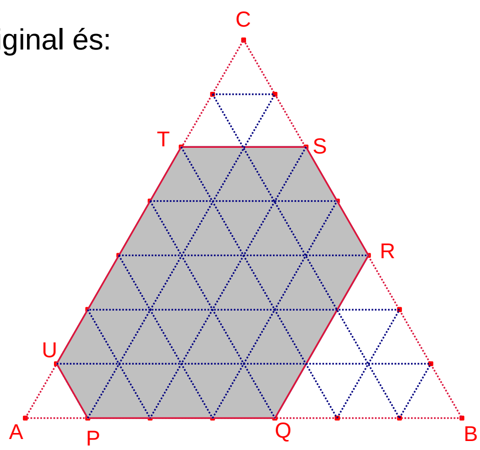
$$S_{PQRSTU}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}1^2-\frac{\sqrt{3}}{4}2^2-\frac{\sqrt{3}}{4}3^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2-14\right).$$

La proporció entre les àrees de l'hexàgon i el triangle original és:

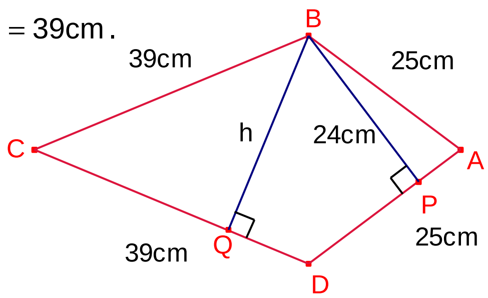
$$\frac{S_{PQRTSTU}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2-14\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{a^2-14}{a^2}.$$

Substituint, $a=7$.

$$\frac{S_{PQRTSTU}}{S_{ABC}}=\frac{a^2-14}{a^2}=\frac{5}{7}.$$

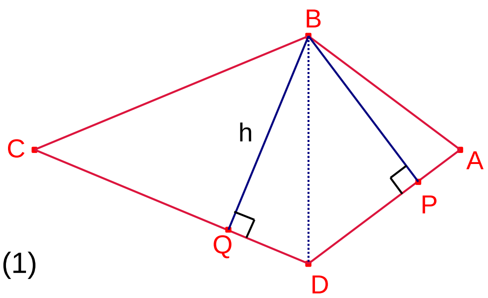


515.- En el cometa de costats $\overline{AB} = \overline{AD} = 25\text{cm}$, $\overline{CB} = \overline{CD} = 39\text{cm}$.
Siga P la projecció de B sobre $\overline{AD}$ tal que $\overline{BP} = 24\text{cm}$.
Siga Q la projecció de B sobre $\overline{CD}$.
Determineu la mesura del segment $h = \overline{BQ}$.



Solució 1:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:
$\overline{AP} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$. $\overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AP} = 25 - 7 = 18$.

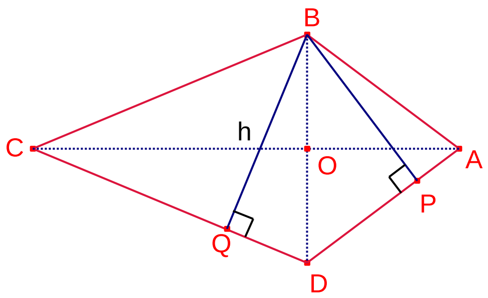


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DPB}$:
$\overline{BD} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$.
Siga $x = \overline{QD}$. $\overline{CQ} = \overline{CD} - \overline{QD} = 39 - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DQB}$:
$h^2 = 30^2 - x^2$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQB}$:
$h^2 = 39^2 - (39 - x)^2$ (2)
Igulant les expressions (1) (2):
$900 - x^2 = 78x - x^2$ (3)
Resolent l'equació:
$x = \frac{450}{39}$ (4)
Substituint l'expressió (4) en l'expressió (1):
$h^2 = 30^2 - \left(\frac{450}{39}\right)^2$. Resolent l'equació: $h = \frac{360}{13}$.

Solució 2:
Siga O la intersecció de les diagonals del cometa.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle
$\overset{\Delta}{APB}$:
$\overline{AP} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.
$\overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AP} = 25 - 7 = 18$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DPB}$:
$\overline{BD} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$. $\overline{OB} = 15$.

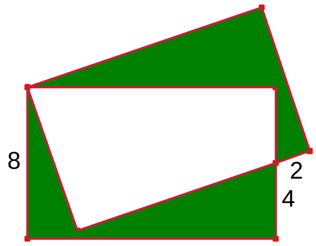
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$:
$\overline{OA} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COB}$:
$\overline{OA} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$. $\overline{AC} = \overline{OA} + \overline{OC} = 20 + 36 = 56$

L'àrea del cometa és: $S_{ABCD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2} = S_{ABD} + S_{BCD}$.

$\frac{30 \cdot 56}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} + \frac{39h}{2}$. Resolent l'equació: $h = \frac{360}{13}$.

516.- En la figura els dos rectangles són iguals.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:

Siga $\overline{AB} = a$.

$\overline{CM} = 4$, $\overline{DE} = 8$.

$\overline{EM} = a - 2$, $\overline{CD} = a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEM}$:

$\overline{DM}^2 = 8^2 + (a-2)^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCM}$:

$\overline{DM}^2 = 4^2 + a^2$.

Igualant ambdues expressions:

$8^2 + (a-2)^2 = 4^2 + a^2$. Resolent l'equació:

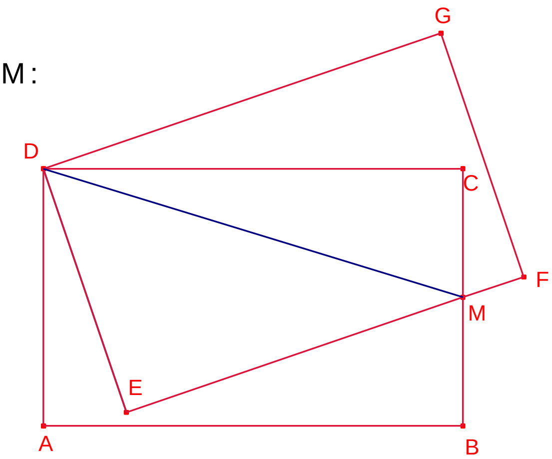
$a = 13$.

L'àrea de la zona ombrejada és:

$S = 2 \cdot S_{ABCD} - 2 \cdot S_{DEMC}$.

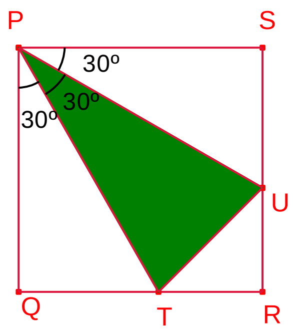
$S = 2 \cdot S_{ABCD} - 2 \cdot (S_{DEM} + S_{DCM})$.

$S = 2 \cdot (13 \cdot 8) - 2\left(\frac{8 \cdot 11}{2} + \frac{4 \cdot 13}{2}\right) = 68$.



517.- En el quadrat PQRS dibuixem el triangle $\overset{\Delta}{PTU}$ tal que $\angle QPT = \angle TPU = \angle UPS = 30^o$.

Calculeu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{PTU}$ i del quadrat PTU.



Solució:

Siga el quadrat PQRS de costat $\overline{PQ} = 1$.

$S_{PQRS} = 1^2 = 1$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQT}$, $\overset{\Delta}{PSU}$ són iguals, aleshores:

$\overline{QT} = \overline{SU}$, per tant, $\overline{TR} = \overline{RU}$

Siga $x = \overline{QT}$.

$\overline{PT} = 2 \cdot \overline{QT} = 2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQT}$:

$1^2 + x^2 = (2x)^2$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\overline{TR} = 1 - x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PTU}$ és igual a l'àrea del quadrat PQRS menys el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQT}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{TRU}$.

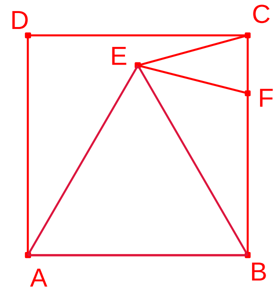
$S_{PTU} = S_{PQRS} - 2 \cdot S_{PQT} - S_{TRU}$.

$$S_{PTU} = 1 - 2 \cdot \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} - \frac{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2} = \frac{1}{3}.$$

La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{PTU}$ i del quadrat PTU és:

$$\frac{S_{PTU}}{S_{PQRS}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}.$$

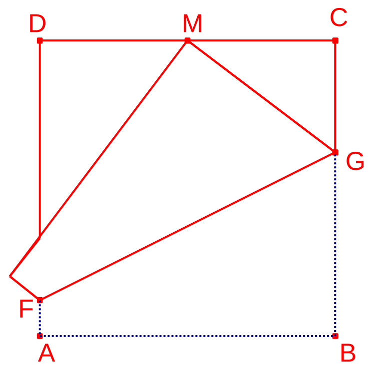
518.- En la figura ABCD és un quadrat, $\overset{\Delta}{ABE}$ un triangle equilàter i F un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{CE}=\overline{FE}$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle BEF$.
UKMT, Cayley 2010.



Solució:
$\overset{\Delta}{ABE}$ un triangle equilàter aleshores:
$\angle ABE=60º$, $\overline{BE}=\overline{AB}=\overline{BC}$.

Aleshores, $\overset{\Delta}{BCE}$ és un triangle isòsceles, $\angle EBC=30º$, $\angle BEC=\angle ECB=75º$.

Com $\overline{CE}=\overline{FE}$, $\overset{\Delta}{CEF}$ és un triangle isòsceles, aleshores:
$\angle EFC=\angle ECF=75º$, $\angle CEF=30º$.
Aleshores, $\angle BEF=\angle BEC-\angle CEF=75º–30º=45º$.



519.- Dobleguem el quadrat ABCD sobre la línia FG fent coincidir el punt B en el punt mig M del costat $\overline{CD}$.

Proveu que els costats del triangle $\overset{\Delta}{GCM}$ estan en proporció $3:4:5$.

Solució:

Siga $a=\overline{AB}$ costat del quadrat ABCD.

Siga $x=\overline{BG}=\overline{GM}$.

$\overline{CG}=a-x$.

$\overline{CM}=\frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GCM}$:

$$x^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+(a-x)^2.$$

Resolent l'equació:

$x=\frac{5}{8}a$.

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{GM}}=\frac{\frac{a}{2}}{x}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{5}{8}a}=\frac{4}{5}.$$

Aleshores, per ser al triangle $\overset{\Delta}{GCM}$ rectangle $\frac{\overline{CG}}{\overline{GM}}=\frac{3}{5}$.

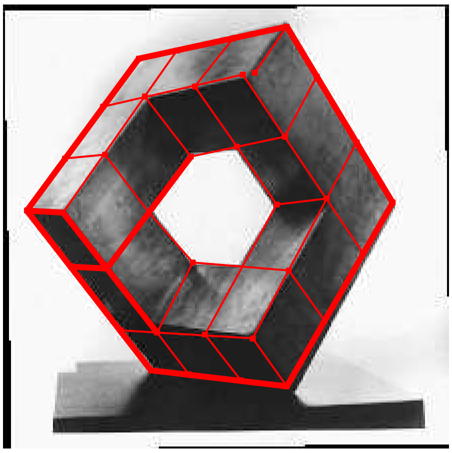
Per tant: $\overline{CG}:\overline{CM}:\overline{GM}=3:4:5$.

520.- El “Cubo Vazado” de l’artista brasiler Franz Weissmann té arestes proporcionals a 1:2:3 i està inscrit en un cub d’aresta 100 cm.
Calculeu el volum del “Cubo Vazado”.

Solució:

Les arestes són de longitud, $\frac{100}{3}, \frac{200}{3}, 100$.

Podem disseccionar el “Cubo Vazado” en 12 cubs d’aresta $\frac{100}{3}$.



$$V_{Vazado} = 12\left(\frac{100}{3}\right)^3 = \frac{4000000}{9}\,cm^3 = \frac{4}{9}\,m^3$$