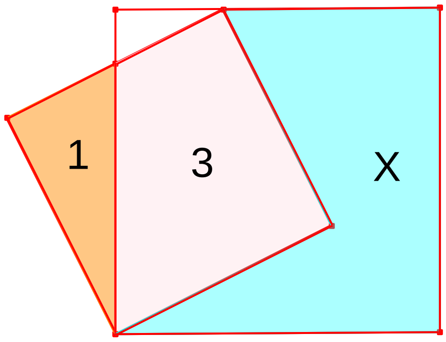
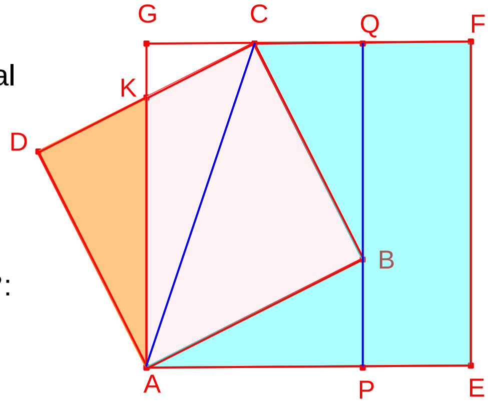
Problemes de Geometria per a l'ESO 520

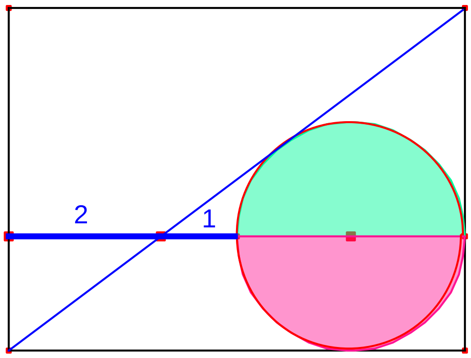
5191.- La figura està formada per dos quadrats que tenen un vèrtex comú.
Calculeu l'àrea X del pentàgon blau



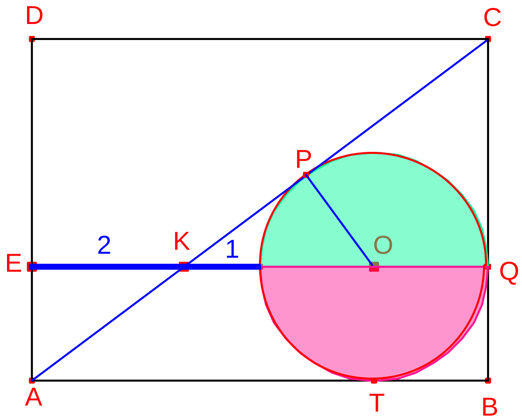
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea 4 i costat $\overline{AB} = 2$
$S_{ABC} = 2, S_{AKC} = 1$
K és el punt mig del costat $\overline{CD}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APB}, \overset{\Delta}{BQC}$ són iguals i semblants al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADK}$.
Siguen $\overline{PB} = \overline{CQ} = x, \overline{AP} = \overline{BQ} = 2x$
$\overline{AE} = \overline{PQ} = 3x$
$\overline{PE} = x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:
$5x^2 = 4$
L'àrea del pentàgon $AEPCB$ és:
$S_{AEFCB} = 2 \cdot S_{APB} + S_{PEFG} = 2x^2 + 3x^2 = 5x^2 = 4$



5192.- Calculeu l'àrea del rectangle de la figura.



Solució:



OP=r

Els triangles KEA, KPO iguals

OQ=AK=1+r, EK=PK=2

teorema Pitàgores AEK

$(1+r)^2=4+r^2$

r=3/2

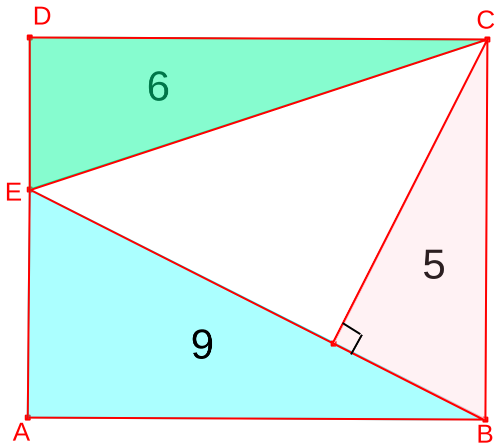
AT=3+r

AB=AT+r=3+2r=6

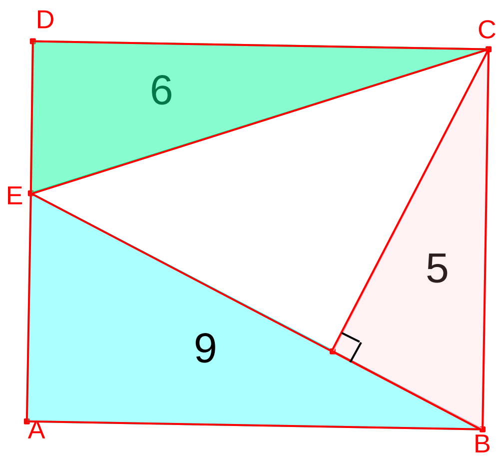
CB=(3/4)AB=9/2

[ABCD]=27

5193.- La figura està formada per un rectangle que conté quatre triangles.
Calculeu l’àrea del rectangle.



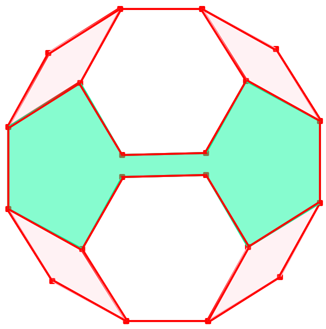
Solució;



[DEC]+[AEB]=(1/2)[ABCD]

[ABCD]=30

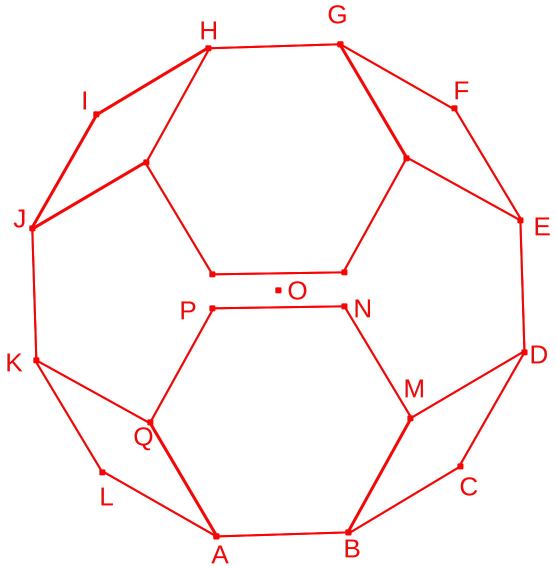
5114.- La figura està formada per un dodecàgon regular i dos hexàgons regulars.
Si el total de l'àrea rosa és 2 calculeu l'àrea verda.



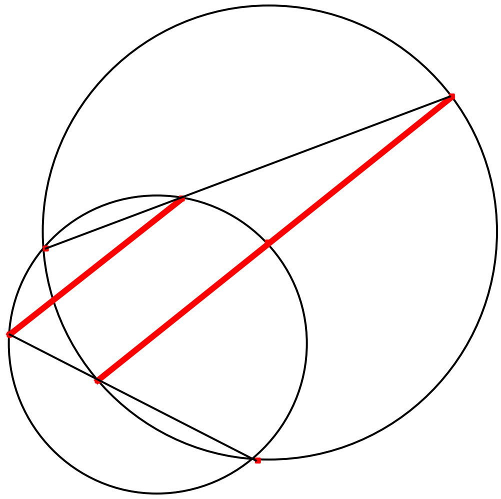
Solució:
Siga el dodecàgon regular $ABCDEFGHIJKL$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$
$\angle BCD = 150°, \angle MBC = 30°, \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BM}$
Aleshores, $BCDM$ és un paral·lelogram.
$S_{BCDM} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2}$
$c = 1$
L'àrea de l'hexàgon $ABMNPQ$ és:
$S_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

Siga $\overline{OA} = \overline{OB} = R$

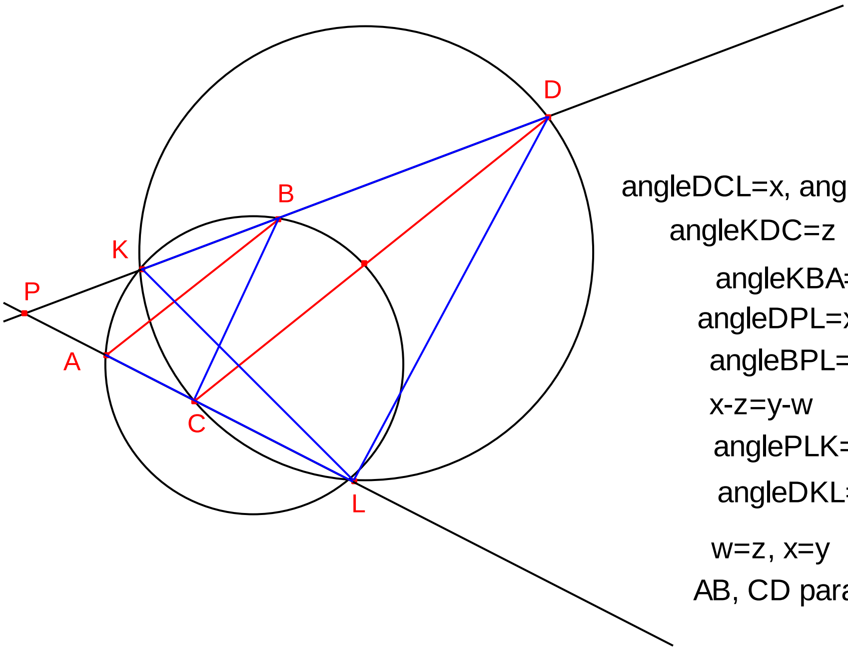
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABO}$:
$1 = 2R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \cos 30°$
$R^2 = 2 + \sqrt{3}$
L'àrea del dodecàgon regular $ABCDEFGHIJKL$ és:
$S_{12} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin 30° = 3\left(2 + \sqrt{3}\right)$
L'àrea verda és:
$S_{verda} = S_{12} - 2S_6 - S_{rosa} = 3\left(2 + \sqrt{3}\right) - 3\sqrt{3} - 2 = 4$



5115.- La figura està formada per dues circumferència secants i quadrat cordes. Demostreu que les cordes roges són paral·leles.



Solució:



angleDCL=x, angleBAC=y

angleKDC=z

angleKBA=w

angleDPL=x-z

angleBPL=y-w

x-z=y-w

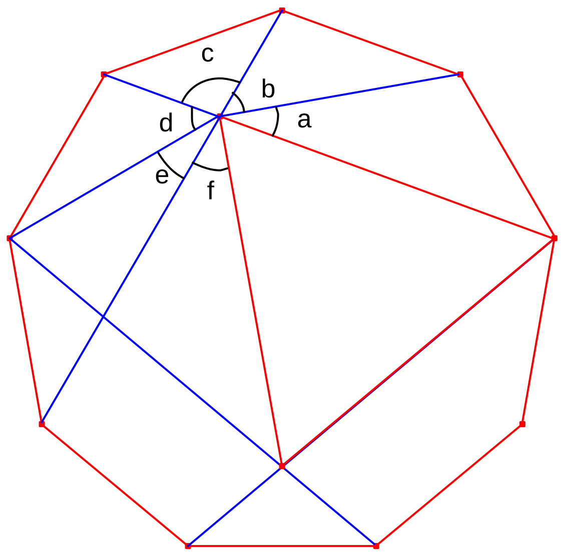
anglePLK=w

angleDKL=x=w+x-z

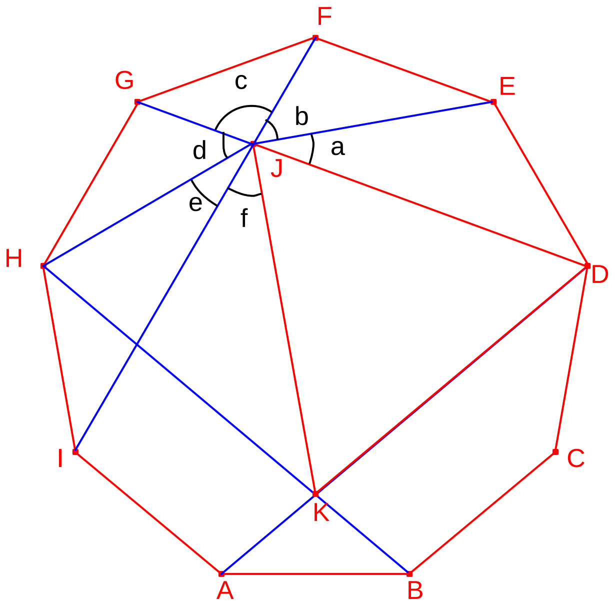
w=z, x=y

AB, CD paral·leles

5196.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura dels angles a, b, c, d, e, f

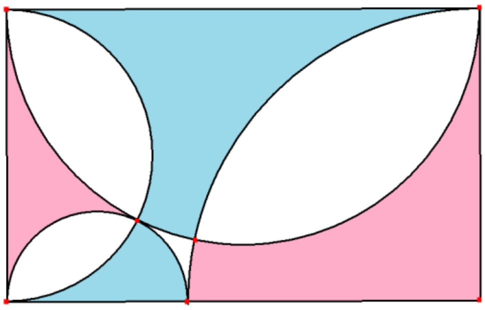


Solució:

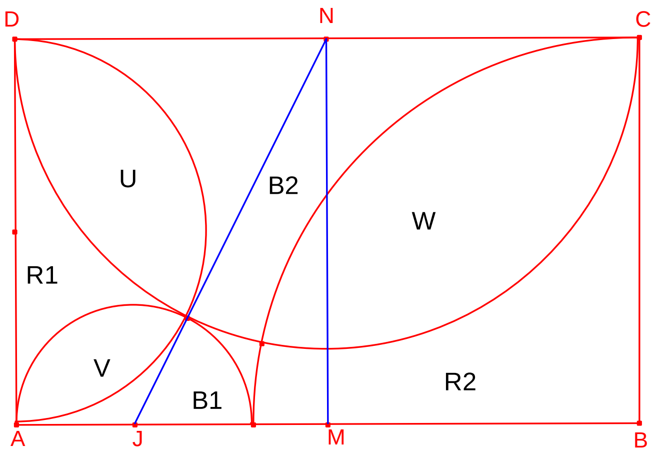


angleDAB=angleADC=40º
angleJDE=140º-(40º+60º)=40º
G, J, D, alineats
Els triangles DEJ, IHJ iguals
I, J, F alineats
angleIFG=angleFGD=40º
c=100º
KD=KH=IJ
angleAKB=100º
angleAKH=80º
angleHKJ=40º
angleJHK=angleHJK=70º
angleJHI=110º
e=a=30º
angleGHJ=140º-(40º+70º)=30º
d=b=50º
f=180º-(60º+a+b+c+d+e)=40º

5197.- La figura està formada per un rectangle que conté un quadrant i tres semicircumferències.
Quina és més gran l'àrea rosa o la blava



Solució:



BC=2a, AB=2b

AJ=b-a

JN=2b-a, JM=a

Teorema Pitàgores JMN

$b^2-ab-b^2=0$

$b/a = (1+\sqrt{5})/2$

$a=1$, $b=(1+\sqrt{5})/2$

$b-a=(-1+\sqrt{5})/2$

$R1+U+V= \pi/2$

$R2+W=\pi$

$R1+R2+U+V+W=(3/2)\cdot\pi$

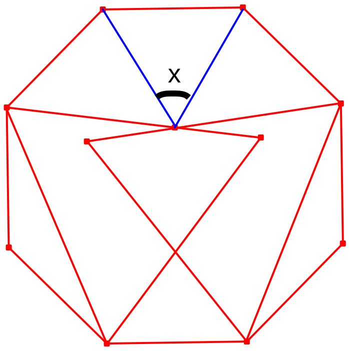
$B1+V=(1/2)\pi\cdot((-1+\sqrt{5})/2)^2$

$B2+U+W=(1/2)\pi\cdot((1+\sqrt{5})/2)^2$

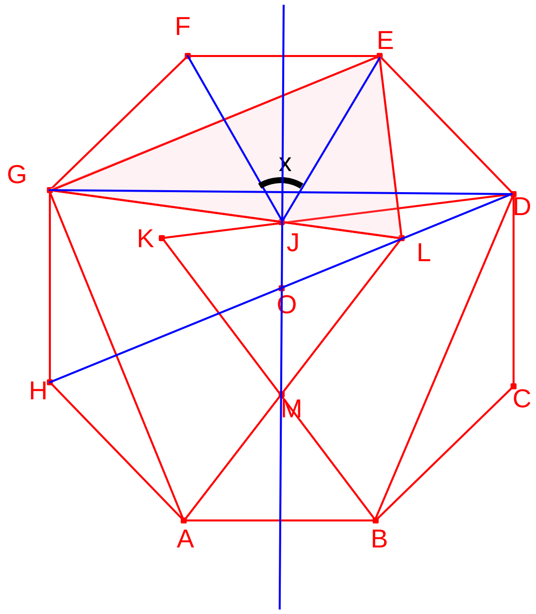
$B1+B2+U+V+W=(3/2)\cdot\pi$

[Rosa]=[Blava]

5198.- La figura està formada per un octògon regular i dos triangles equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle x

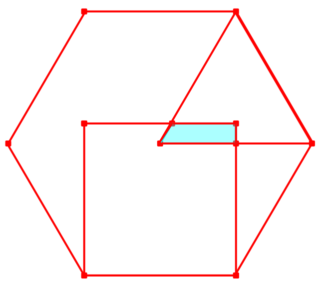


Solució:

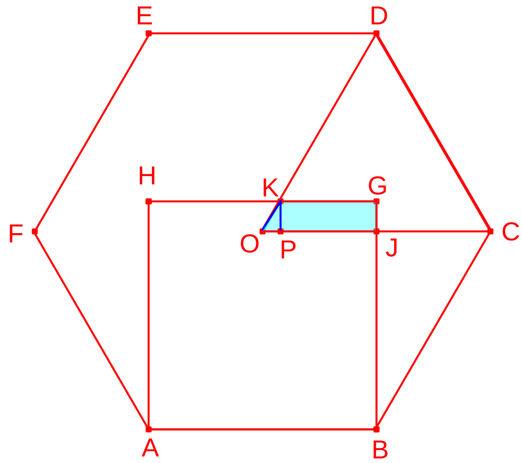


GL=GE
angleDGJ=angleGDJ=15º/2
AngleDGD=45º72
angleEGL=30º
angleGLE=angleGEL=75º
angleHDB=45º
angleJDL=15º
angleKJL=165º
angleDJL=15º
JL=DL, angleJLD=150º
Ela triangles DLE, JLD iguals
JE=DE
FJ=JE=FE
x=60º

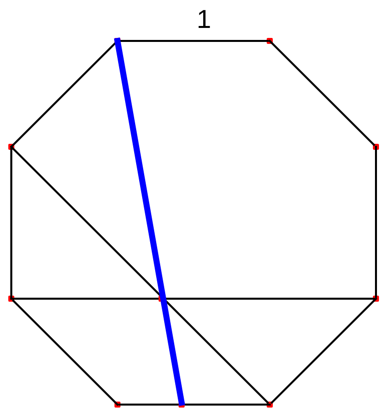
5199.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 2 que conté un quadrat i un triangle equilàter.
Calculeu l'àrea ombrejada.



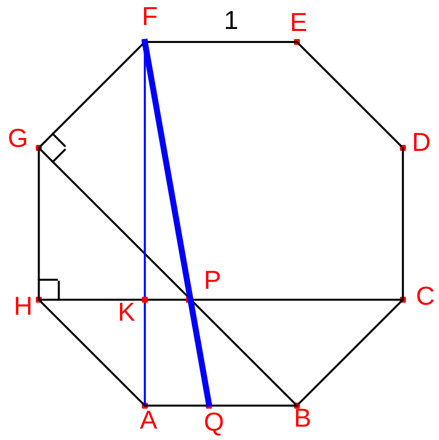
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O i costat $\overline{AB} = 2$
$\overline{OJ} = \overline{CJ} = 1$
$\overline{JG} = 2 - \sqrt{3}$
$\overline{OK} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(2 - \sqrt{3}\right)$
$\overline{OP} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2 - \sqrt{3}\right)$
$\overline{KG} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{2\left(2\sqrt{3} - 3\right)}{3}$
L'àrea del trapezi $OJGK$ és:
$$S_{OJGK} = \frac{1 + \frac{2\left(2\sqrt{3} - 3\right)}{3}}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{6}$$



5200.- En un octògon regular s'han dibuixat dues diagonals.
Calculeu la mesura del segment blau.



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = 1$
$\overline{GH} = \overline{HP} = 1, \overline{GP} = \sqrt{2}$
$\overline{FP} = \sqrt{3}$
$\overline{FA} = 1 + \sqrt{2}$
$\overline{FK} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{FKP}, \overset{\Delta}{FAQ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{FQ}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$\overline{FQ} = \sqrt{6}$