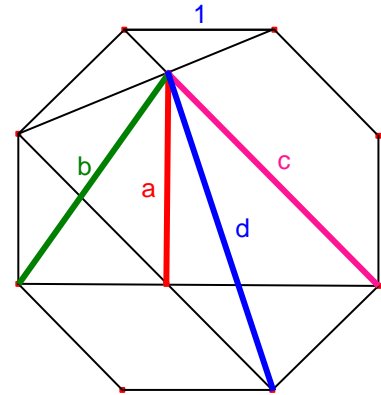


## Problemes de Geometria per a l'ESO 521

5201.- La figura està formada per un octògon regular i quatre diagonals.  
Calculeu la mesura dels segments  $a, b, c, d$



Solució:

$$\angle HGJ = \angle JCB = 45^\circ, \angle GHJ = \angle GBC = 90^\circ$$

$$\overline{HJ} = 1, \overline{GJ} = \overline{JC} = \sqrt{2}$$

$HD$  paral·lela mitjana de  $GE, AC$

$$c = \overline{AP} = 2 \cdot \overline{AH} = 2$$

$$\angle JCK = \angle BJC = 45^\circ, \angle KCB = \angle JBC = 90^\circ$$

$$\angle BJK = \angle JBC = 90^\circ$$

$$\overline{JC} = \sqrt{2}, c = 2, \angle JCK = 45^\circ$$

Aleshores el triangle  $\triangle KJC$  és rectangle i isòsceles.

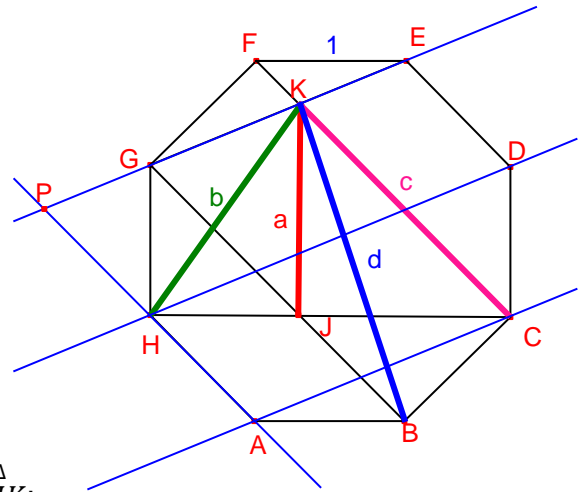
$$a = \overline{JC} = \sqrt{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle HJK$ :

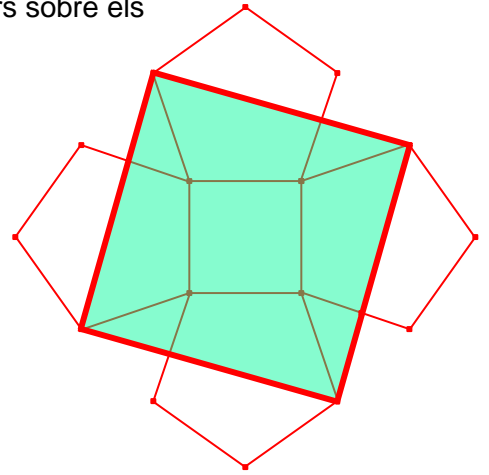
$$b = \sqrt{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BCK$ :

$$d = \sqrt{5}$$



5202.- La figura està formada per quatre pentàgons regulars sobre els costats d'un quadrat de costat 1. Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:

Siga el quadrat  $ABCD$  de costat  $c = \overline{AB}$

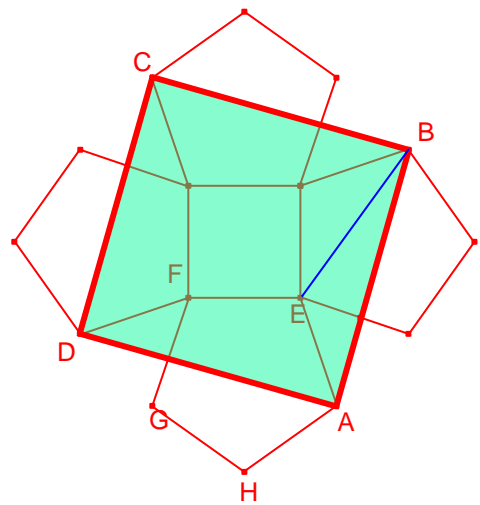
Siga el pentàgon regular  $AEFGH$  de costat  $\overline{AE} = 1$

$$\overline{BE} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

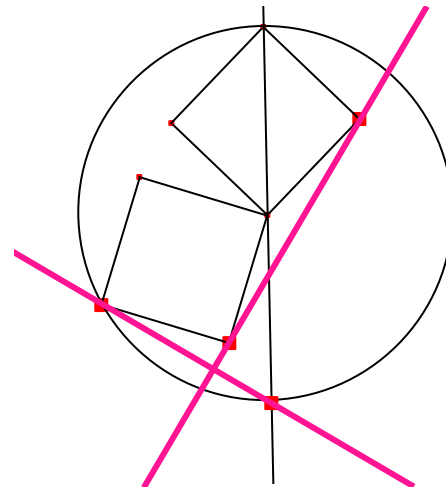
$$\angle AEB = 72^\circ + 54^\circ = 126^\circ$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle ABE$ :

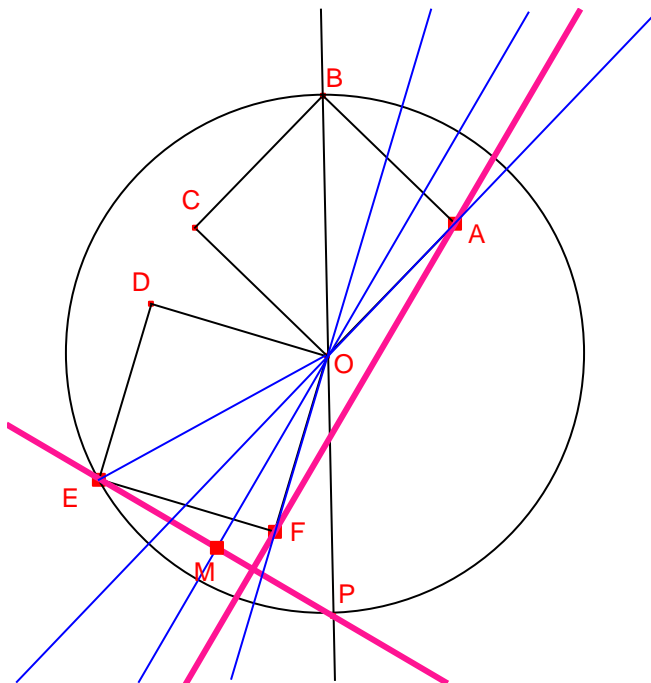
$$c^2 = 1 + \Phi^2 + \Phi\sqrt{4 - \Phi^2} \approx 5.5201$$



5203.- La figura està formada per una circumferència que conté dos quadrats. Proveu que les dues rectes rosa són perpendiculars.



Solució:



O centre de la circumferència

$$\text{angleCOD}=a$$

$$\text{angleOFA}=\text{angleOAF}=a/2$$

$$\text{angleFOP}=45^\circ-a$$

$$\text{angleEOP}=90^\circ-a$$

$$\text{angleMOP}=45^\circ-a/2$$

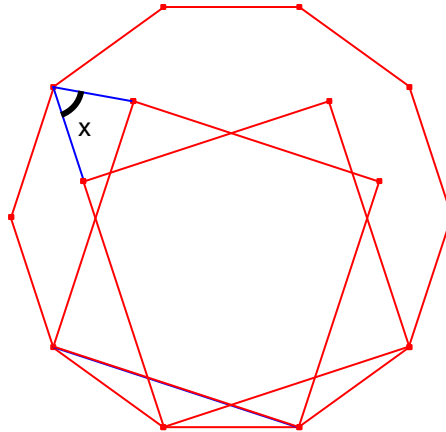
$$\text{angleMOF}=a/2$$

OM, FA paral·lels

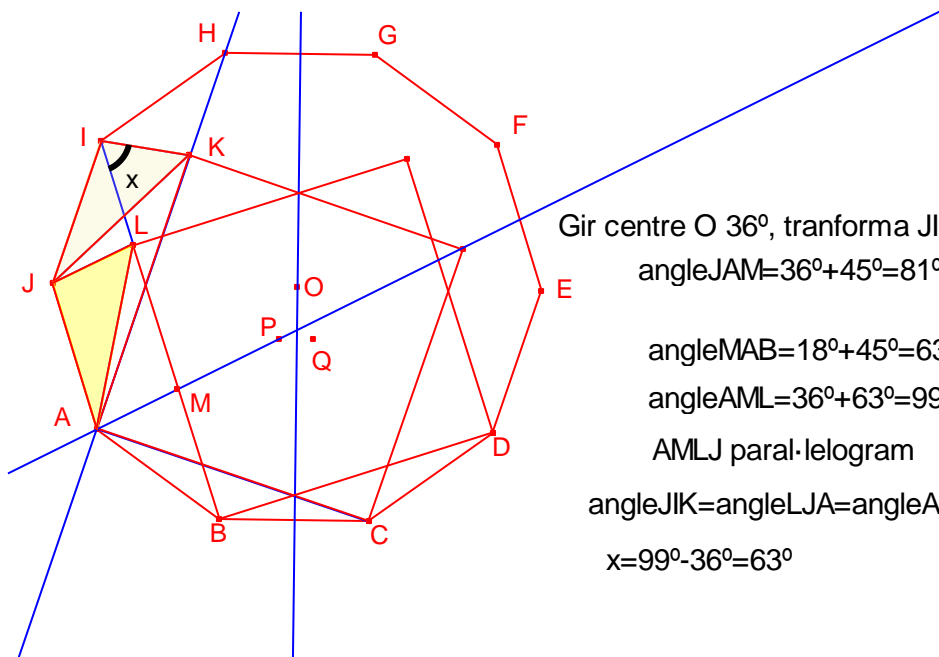
OM perpendicular EP

EP, AF perpendiculars

5204.- La figura està formada per un decàgon regular i dos quadrats.  
 Calculeu la mesura de l'angle  $x$



Solució:



Gir centre O  $36^\circ$ , transforma JIK en JAL  
 $\text{angleJAM} = 36^\circ + 45^\circ = 81^\circ$

$$\text{angleMAB} = 18^\circ + 45^\circ = 63^\circ$$

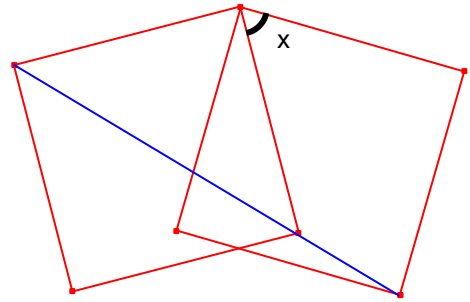
$$\text{angleAML} = 36^\circ + 63^\circ = 99^\circ$$

AMLJ paral·lelogram

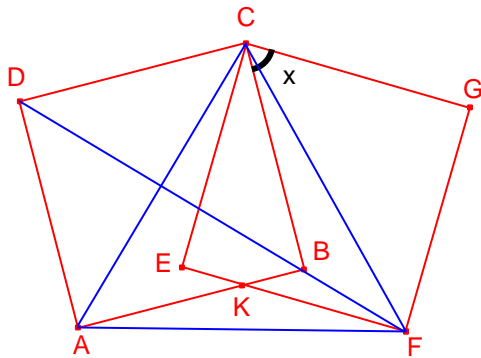
$$\text{angleJIK} = \text{angleLJA} = \text{angleAML} = 99^\circ$$

$$x = 99^\circ - 36^\circ = 63^\circ$$

5205.- La figura està formada per dos quadrats iguals que tenen un vèrtex comú i un segment que uneix tres vèrtexs. Calculeu la mesura de l'angle  $x$

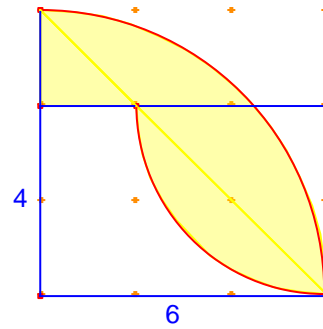


Solució.

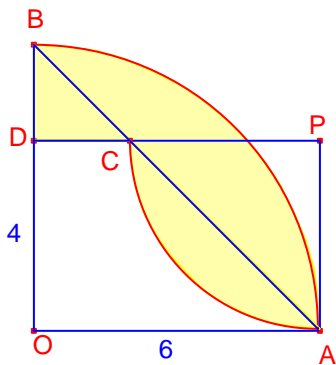


$\text{angleCBF} = \text{angleABF} = 135^\circ$   
 Els triangles ABF, CBF són iguals  
 $AF = CF = AC$   
 El triangle AFC és equilàter  
 $\text{angleDCF} = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$   
 $\text{angleBCF} = 105^\circ - 90^\circ = 15^\circ$   
 $x = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$

5206.- La figura està formada per dos quadrants.  
 Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:



Siga el quadrant de centre  $O$  i radi  $\overline{OA} = \overline{OB} = 6$

Siga el quadrant de centre  $P$  i radi  $\overline{PA} = \overline{PC} = 4$

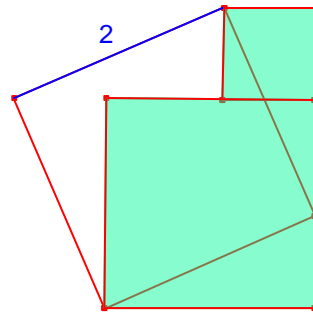
$\overline{CD} = \overline{BD}$

Els punts  $B, C, A$  estan alineats.

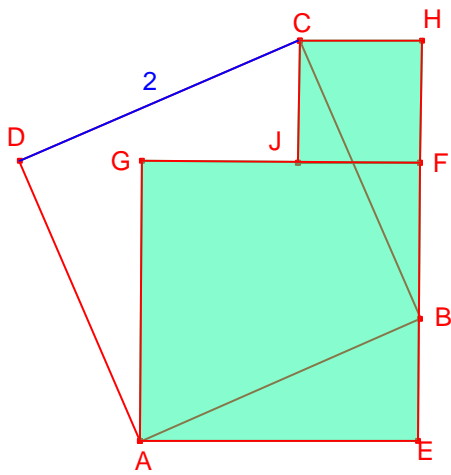
L'àrea ombrejada és:

$$S_{\text{ombrejada}} = \frac{1}{4}\pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 13\pi - 24 \approx 16.8407$$

5207.- La figura està formada per tres quadrats un dels quals té costat 2.  
 Calculeu l'àrea ombrejada pels altres dos quadrats.



Solució:



$$AE=a, JF=b$$

Els triangles AEB, BHC iguals

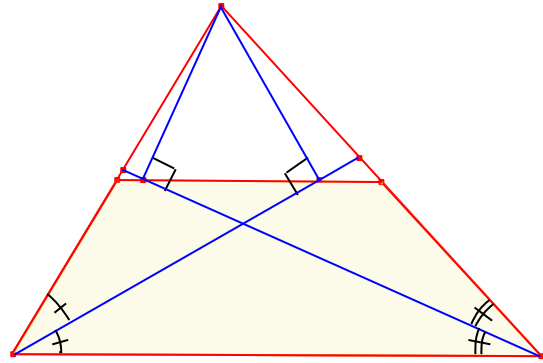
$$BE=\sqrt{4-a^2}$$

$$BH=a+b-\sqrt{4-a^2}$$

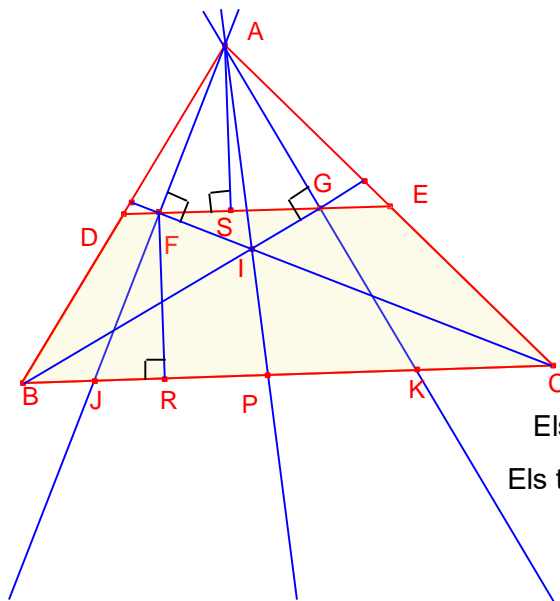
$$b=\sqrt{4-a^2}$$

$$[AEFG]+[JFHC]=a^2+b^2=4$$

5208.- La figura està formada per un triangle i dues bisectrius.  
 Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle.



Solució:



$$\text{angle}BIC = 90^\circ + A/2$$

AFIG cíclic

$$\text{angle}BIP = \text{angle}AIG = 90^\circ - C/2$$

$$\text{angle}IAG = C/2$$

$$\text{angle}GFI = \text{angle}IAG = C/2$$

DE, BC paral·lels

$$\text{angle}JCF = \text{angle}ACF = C/2, \text{angle}AFC = 90^\circ$$

$$JF = AF$$

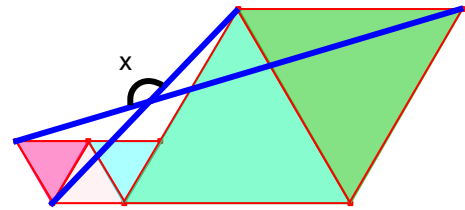
Els triangles rectangles JRF, FSA iguals

Els triangles ABC, ADE semblants i de raó 2 : 1

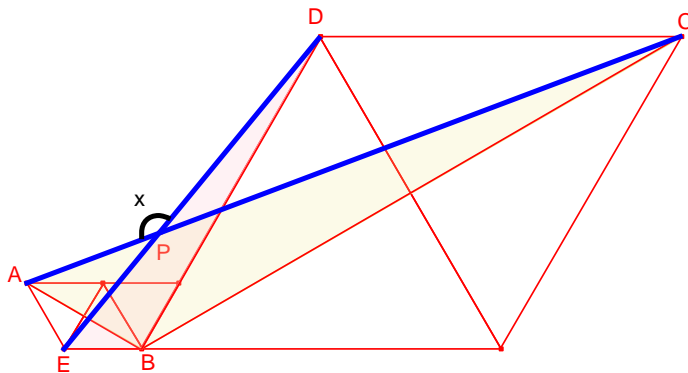
$$[BCED] = (3/4) \cdot [ABC]$$



5209.- La figura està formada per cinc triangles equilàters.  
 Calculeu la mesura de l'angle  $x$



Solució:



$$BE=a, BD=b$$

$$\text{angleEBD}=120^\circ$$

$$\text{angleABC}=120^\circ$$

$$AB=a \cdot \sqrt{3}, BC=b \cdot \sqrt{3}$$

Els triangles EBD, ABC semblants.

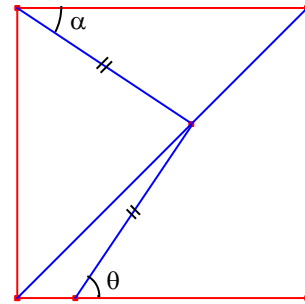
$$\text{angleEBA}=30^\circ$$

$$\text{angleDPC}=30^\circ$$

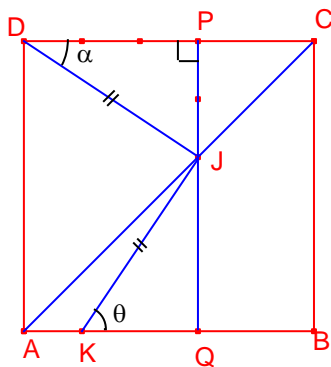
$$x=150^\circ$$

5210.- La figura està formada per un quadrat, una diagonal i dos segments iguals.

Si  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ , calculeu  $\tan \theta$



Solució:



Siga  $DP=3k$ ,  $PJ=2k$

$PC=PJ=2k$

$AB=5k$

$JQ=3k$

Els triangles rectangles  $DPJ$ ,  $JQK$  són iguals

$KQ=3k$

$\tan \theta = 3/2$