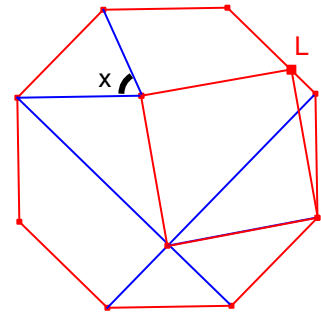
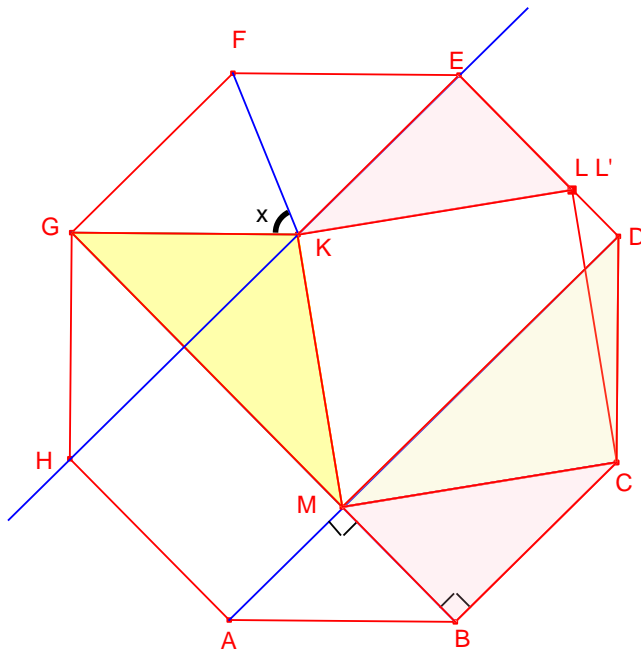


Problemes de Geometria per a l'ESO 522

5211.- La figura està formada per un octògon regular, dues diagonals i un quadrat.
 Proveu que el vèrtex L del quadrat pertany a l'octògon regular.
 Calculeu la mesura de l'angle x

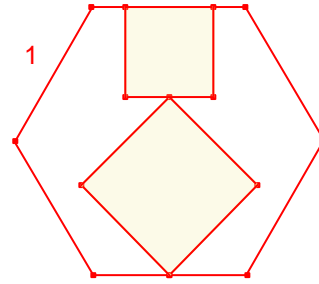


Solució:

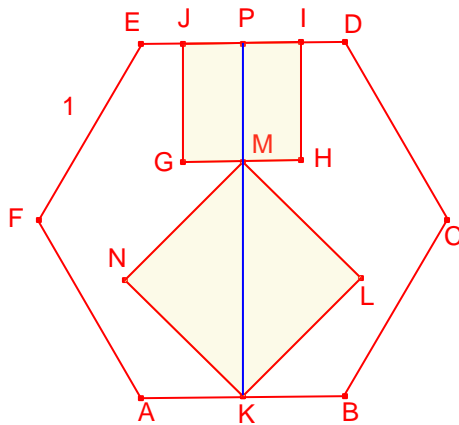


$AB=1$
 $\text{angle}DMC=y$
 $\text{angle}MCB=y$
 $\text{angle}GMK=y$
 $MG=MD, MK=CM$
 Els triangles MCD, MKG iguals
 $\text{angle}KGM=45^\circ$
 $GK=GF=1$
 $x=135^\circ/2$
 La recta KL talla DE en L'
 $KL' \parallel MC, BM \parallel DE, KE \parallel BC, KE=BC=1$
 Els triangles $CMB, KL'E$ iguals
 $L=L'$

5212.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 1 i dos quadrats, tal que la suma de les àrees és mínima.
 Calculeu l'àrea mínima ombrejada



Solució:



$$GH=PM=c, KL=d, KM=d \cdot \sqrt{2}$$

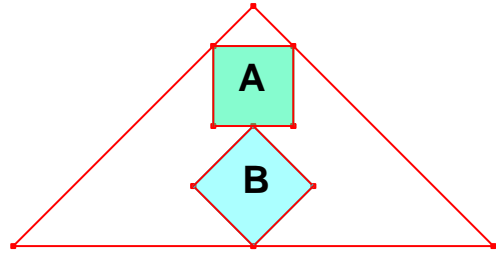
$$KP=\sqrt{3}=c+d \cdot \sqrt{2}$$

$$[GHIJ]+[KLMN]=c^2+d^2=3d^2-2 \cdot \sqrt{6} \cdot d+3$$

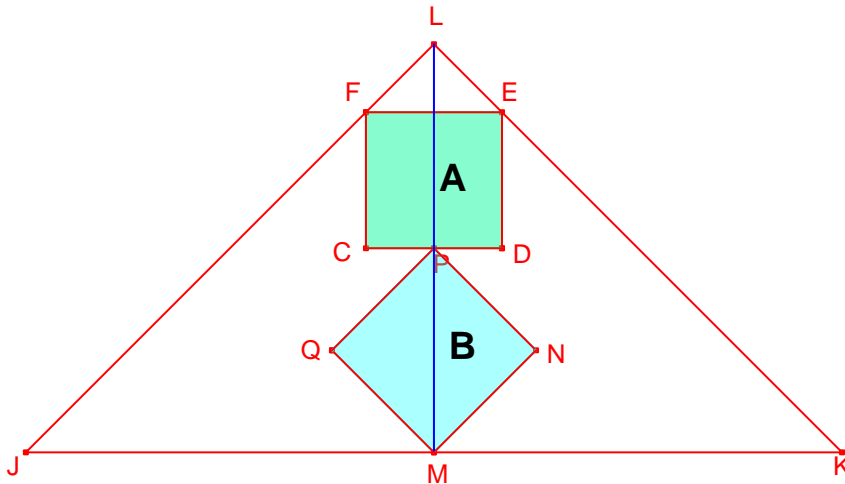
mínim quan, $d=\sqrt{6}/3$

$$[\text{mínim}]=1$$

5213.- Dos quadrats d'àrees A, B estan en l'interior de mig quadrat.
 Si la proporció entre $A + B$ i l'àrea del mig quadrat és mínima, calculeu $A : B$



Solució:



Siga el mig quadrat JKL , $\overline{JK} = 2$

$$S_{JKL} = 1$$

Siga el quadrat $CDEF$ de costat $\overline{CD} = c$

Siga el quadrat $MNPQ$ de costat $\overline{MN} = d$

$$\overline{MN} = 1 = \frac{3}{2}c + d\sqrt{2}$$

$$c = \frac{2(1 - d\sqrt{2})}{3}$$

La proporció entre la suma d'àrees $A + B$ i l'àrea JKL , és:

$$\frac{A + B}{1} = c^2 + d^2 = \frac{1}{9}(17d^2 - 8\sqrt{2}d + 4)$$

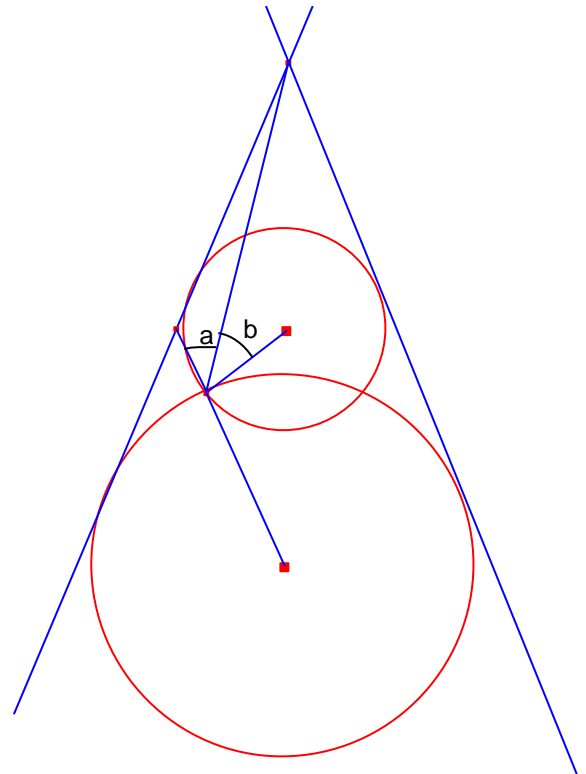
El mínim de la suma s'assoleix quan:

$$d = \frac{4\sqrt{2}}{17}, \quad c = \frac{6}{17}$$

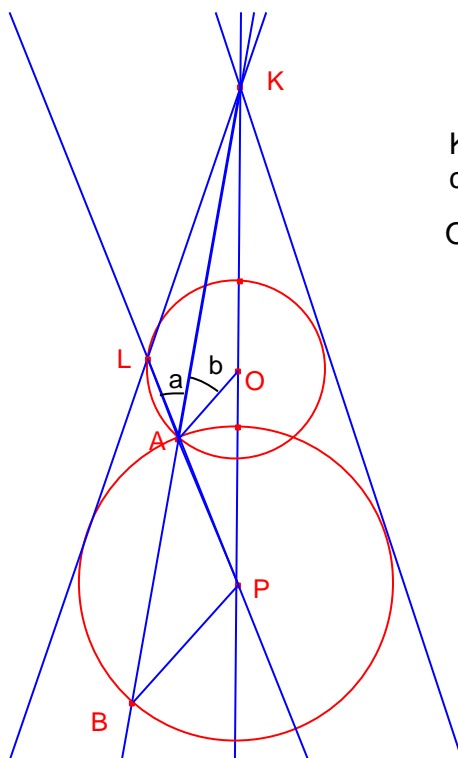
Aleshores:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

5214.- La figura està formada per dues circumferències secants i les tangents comunes
 Proveu que $a = b$



Solució:



K centre homotècia de les dues circumferències

OA, PB paral·lels

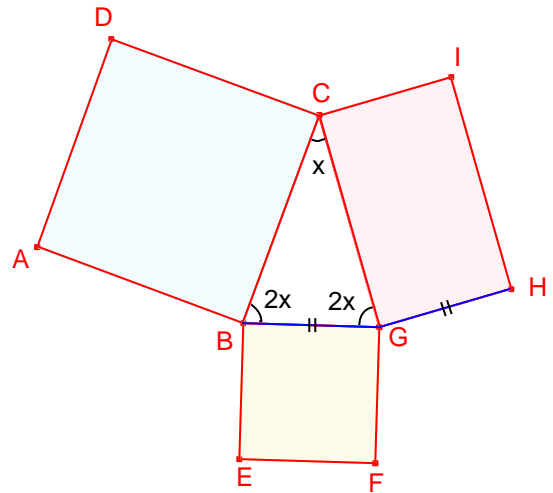
$$\text{angleKBP} = \text{angleKAO} = b$$

$$\text{angleBAP} = \text{angleLAK} = a$$

$$PB = PA$$

$$a = b$$

5215.- La figura està formada per un triangle isòsceles els quadrats $ABCD$, $BEFG$ i el rectangle $CGHI$ sobre els costats del triangle. Calculeu $S_{ABCD} - S_{BEFG} - S_{CGHI}$



Solució:

$$x + 2x + 2x = 180^\circ$$

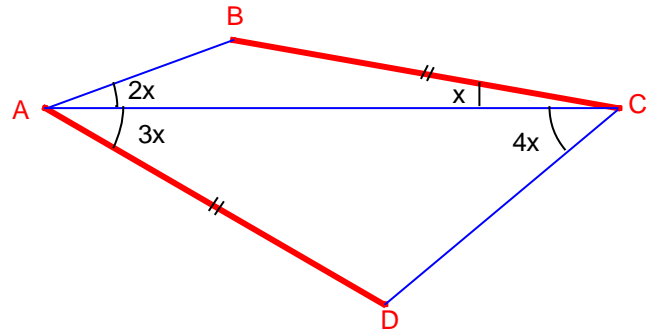
$$x = 36^\circ$$

El triangle BGC és auri.

Siguen $\overline{BG} = \overline{GH} = 1$, $\overline{CG} = \overline{AB} = \Phi$

$$S_{ABCD} - S_{BEFG} - S_{CGHI} = \Phi^2 - 1 - \Phi = 0$$

5216.- En el quadrilàter $ABCD$, $\overline{BC} = \overline{AD}$
 Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

Siga $\overline{BC} = \overline{AD} = a$, $\overline{AC} = b$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{a}{\sin 2x} = \frac{b}{\sin 3x}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ADC$:

$$\frac{a}{\sin 4x} = \frac{b}{\sin 7x}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{\sin 7x}{\sin 3x} = \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$$

$$\sin 7x = 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 7x = \sin 5x \cdot \sin x$$

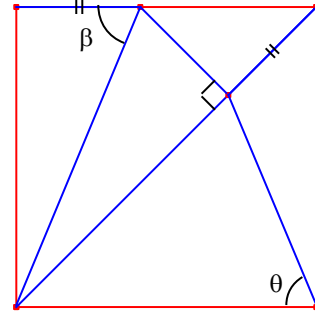
$$\sin 7x - \sin 5x = \sin x$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos 6x = \sin x$$

$$\cos 6x = \frac{1}{2}$$

$$x = 10^\circ$$

5217.- La figura està formada per un quadrat i una diagonal
 Proveu que $\beta = \theta$



Solució 1:

Siga el quadrat $ABCD$.

Siga $\overline{DK} = \overline{CL}$

Siga $\angle ALK = \angle KLC = 90^\circ$

$\angle LCK = \angle LCB = 45^\circ$

Aleshores, $\overline{KL} = \overline{CL}$

Els triangles rectangles $\triangle ADK, \triangle ALK$ són iguals.

$$\angle DAK = \angle LAK = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\beta = \frac{135^\circ}{2}$$

La diagonal \overline{BD} talla el segment \overline{AK} en el punt P

$$\angle DPK = \frac{45^\circ}{2} + 45^\circ = \frac{135^\circ}{2}$$

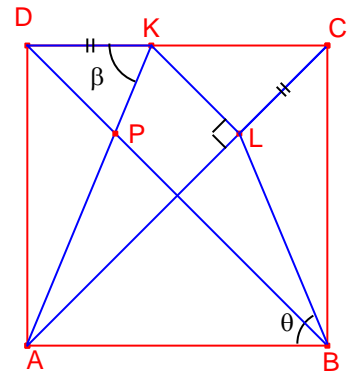
Aleshores, $\overline{DP} = \overline{DK}$

Els triangles $\triangle DPA, \triangle CLB$ són iguals

$$\angle LBC = \angle PAD = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\theta = \frac{135^\circ}{2}$$

$$\beta = \theta$$



Solució 2:

Siga el quadrat $ABCD$.

Siga $\overline{DK} = \overline{CL} = a$

Siga $\angle ALK = \angle KLC = 90^\circ$

$\angle LCK = \angle LCB = 45^\circ$

Aleshores, $\overline{KL} = \overline{CL} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle KLC$

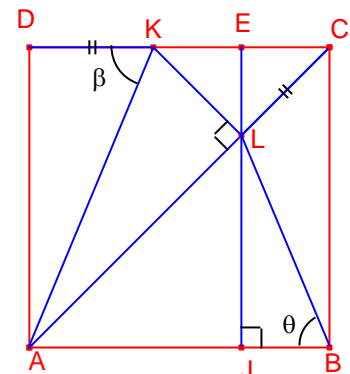
$$\overline{CK} = a\sqrt{2}, \overline{AD} = (1 + \sqrt{2})a$$

$$\tan \beta = 1 + \sqrt{2}$$

$$\overline{CE} = \overline{LE} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \overline{JL} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$$

$$\tan \theta = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\beta = \theta$$

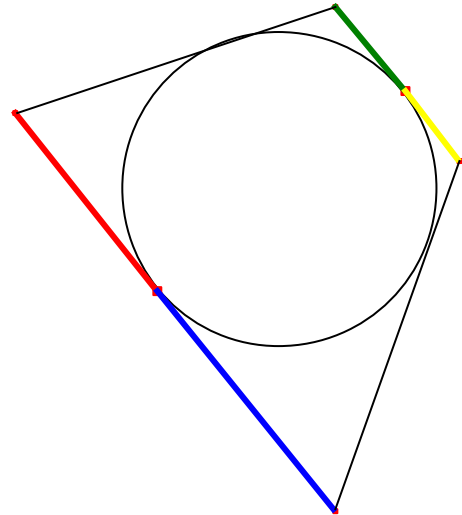


5218.- La figura està formada per un trapezi que conté una circumferència inscrita.

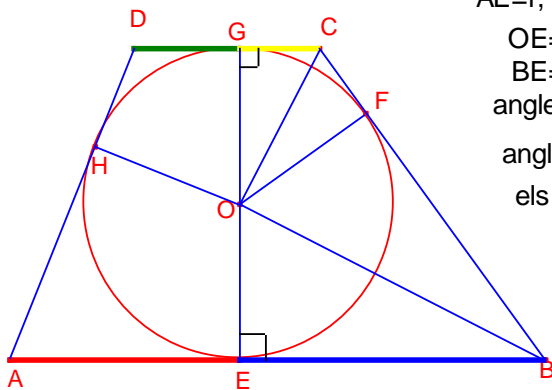
Es mostren els punts de tangència dels costats paral·lels

Calculeu:

$$\frac{\text{roig}}{\text{blau}} - \frac{\text{groc}}{\text{verd}}$$



Solució:



$$AE=r, BE=b, CG=g, DG=v$$

$$OE=OF=R$$

$$BE=BF, CF=CG$$

$$\text{angle}EBC+\text{angle}FCG=180^\circ$$

$$\text{angle}OBE+\text{angle}OCF=90^\circ$$

els triangles rectangles OEB, CFO semblants

$$gb=R^2$$

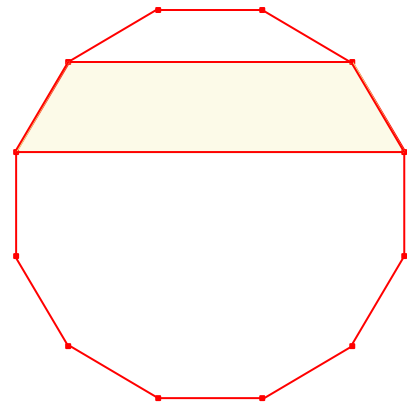
$$rv=R^2$$

$$gb=rv$$

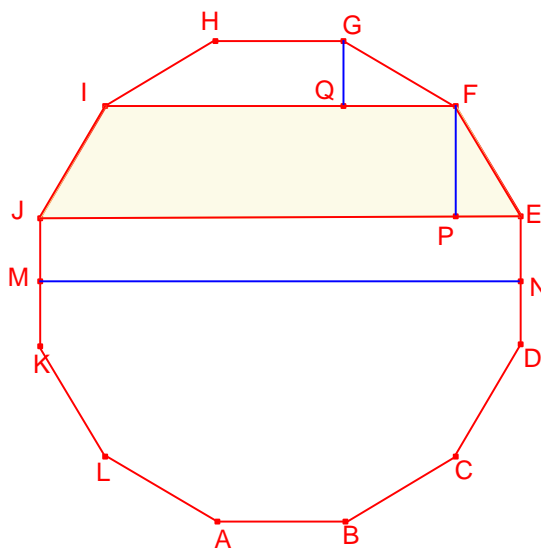
$$r/b=g/v$$

$$AE/BE - CG/DG = 0$$

5219.- La figura està formada per un dodecàgon regular i dues diagonals.
 Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del dodecàgon regular.



Solució:

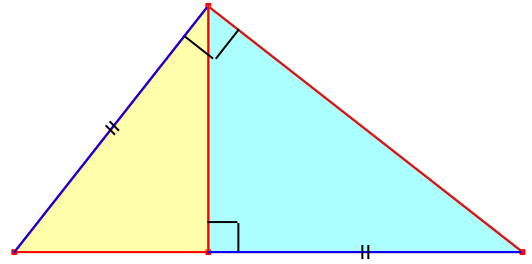


$$\begin{aligned}
 AB &= 1 \\
 \angle JEF &= 60^\circ \\
 \angle IFG &= 30^\circ \\
 PE &= GQ = 1/2 \\
 PF &= FQ = \sqrt{3}/2 \\
 JE &= 2 + \sqrt{3} \\
 FI &= 1 + \sqrt{3} \\
 [JEFI] &= (6 + 3 \cdot \sqrt{3})/4 \\
 [IFGH] &= (2 + \sqrt{3})/4 \\
 [MNEF] &= (2 + \sqrt{3})/2
 \end{aligned}$$

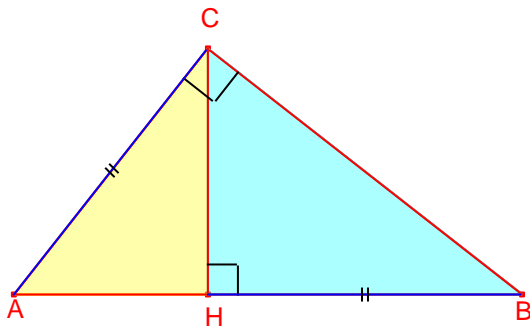
$$[ABCDEFGH IJ K L] = 2 \cdot ([MNEJ] + [JEFI] + [IFGH]) = 6 + \sqrt{3}$$

$$[JEFI] / [ABCDEFGH IJ K L] = 1/4$$

5220.- La figura està formada per un triangle rectangle i l'altura sobre la hipotenusa que el divideix en dos triangles. Calculeu la proporció entre les àrees del triangle blau i el groc



Solució:



$AC=BH=x$
 $AH=y$
 teorema catet ACB
 $x^2=y(x+y)$
 $x^2-xy-y^2=0$

$$[BHC]/[AHC]=x/y=(1+\sqrt{5})/2=\Phi$$