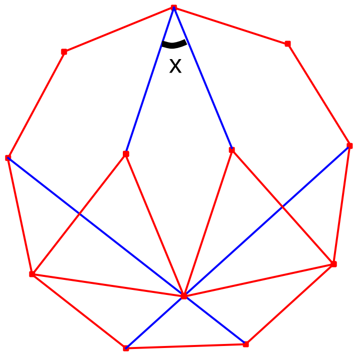
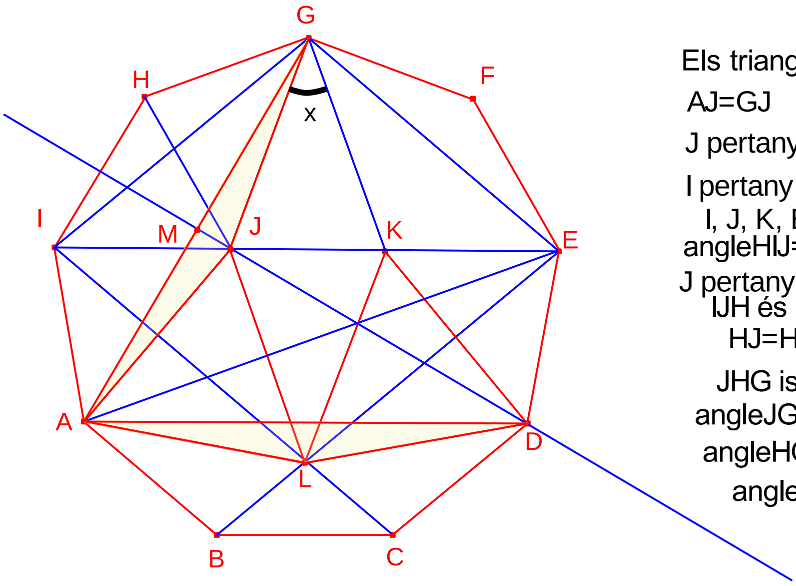
Problemes de Geometria per a l'ESO 524

5231.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i dos triangles equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle x

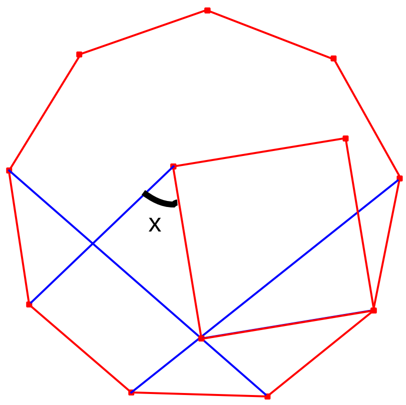


Solució:

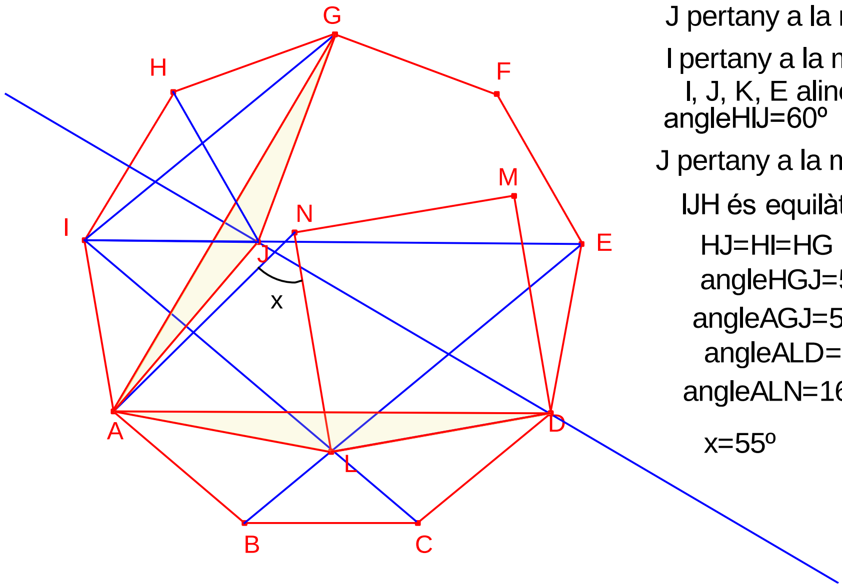


Els triangles ALD, AJG són iguals
AJ=GJ
J pertany a la mediatriu de GL
I pertany a la mediatriu de GL
I, J, K, E alineats
angleHIJ=60º
J pertany a la mediatriu de HI
IJH és equilàter
HJ=HI=HG
JHG isòsceles
angleJGG=140º-60º=80º
angleHGJ=50º
angleJGK=40º

5232.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i un quadrat.
Calculeu la mesura de l'angle x



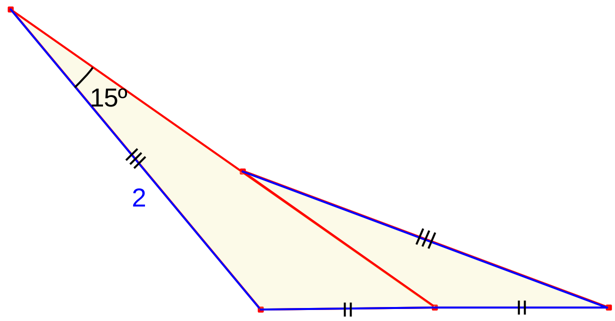
Solució:



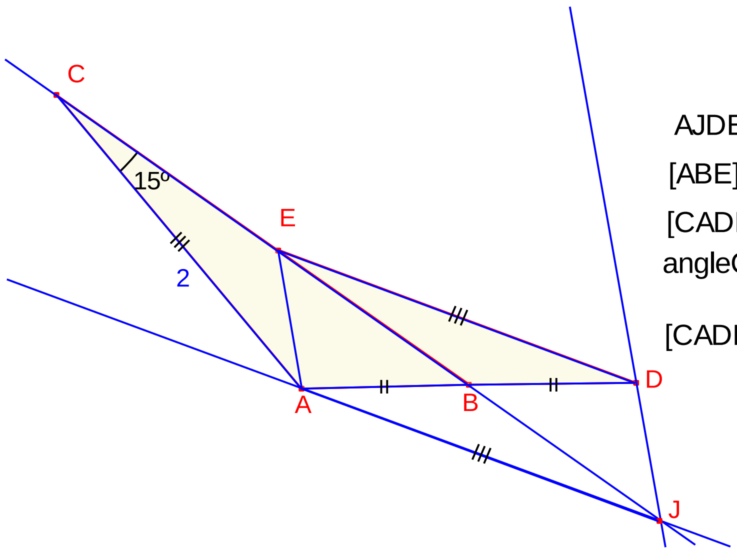
Els triangles ALD, AJG són iguals
AJ=GJ
J pertany a la mediatriu de GL
I pertany a la mediatriu de GL
I, J, K, E alineats
angleHIJ=60º
J pertany a la mediatriu de HI
IJH és equilàter
HJ=HI=HG
angleHGJ=50º
angleAGJ=50º-40º=10º
angleALD=160º
angleALN=160º-90º=70º

x=55º

5233.- La figura està formada per dos triangles que formen un quadrilàter. Calculeu l'àrea del quadrilàter.



Solució:



AJDE paral·lelogram

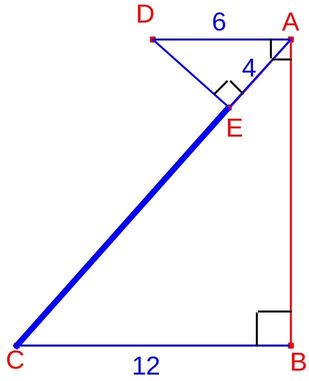
[ABE]=[ABJ]=[BDE]

[CADE]=[CAJ]

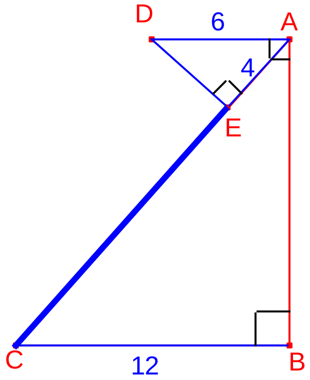
angleCAJ=150º

[CADE]=[CAJ]=(1/2)·2·2·sin150º=1

5234.- En la figura calculeu la mesura del segment $\overline{CE}$



Solució:

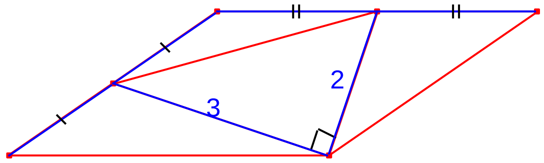


Els triangles ABC, DEA són semblants

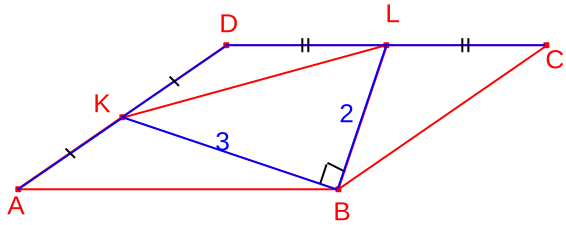
(4+CE)/6 = 12/4

CE=14

5235.- Un paral·lelogram conté un triangle equilàter de catets 3, 2. Calculeu l'àrea del paral·lelogram.



Solució:
Siga el paral·lelogram $ABCD, \overline{AB} = 2a, \overline{AD} = 2b$
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBL}, \overline{BK} = 3, \overline{BL} = 2$
$\overline{KL} = \sqrt{13}$
Siga $\alpha = \angle DAB$

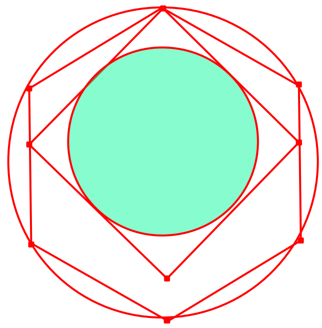


Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:
$9 = b^2 + 4a^2 - 4ab \cdot \cos\alpha$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCL}$:
$4 = 4b^2 + a^2 - 4ab \cdot \cos\alpha$
Restant les dues expressions:
$5 = 3a^2 - 3b^2$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DKL}$:
$13 = b^2 + a^2 + 2ab \cdot \cos\alpha$
$26 = 2b^2 + 2a^2 + 4ab \cdot \cos\alpha$
Sumant la primera i la darrera expressió:
$35 = 6a^2 + 3b^2$
Resolent el sistema $\begin{cases} 3a^2 - 3b^2 = 5 \\ 6a^2 + 3b^2 = 35 \end{cases}$

$$\begin{cases} a = \dfrac{2\sqrt{10}}{3} \\ b = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DKL}$:
$$13 = \frac{25}{9} + \frac{40}{9} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{13}{5\sqrt{10}}, \sin\alpha = \frac{9}{5\sqrt{10}}$$
L'àrea del paral·lelogram $ABCD$ és:
$$S_{ABCD} = 2a \cdot 2b \cdot \sin\alpha = 4 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{5\sqrt{10}} = 8$$

5236.- La figura està formada per un hexàgon i la seua circumferència circumscrita i un quadrat i la seua circumferència inscrita.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle ombrejat i l'àrea del cercle exterior.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O i radi de la circumferència circumscrita $R = \overline{OA} = \overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $DJKL$ de centre P i de diagonal $\overline{JL} = \overline{FB} = \sqrt{3}$

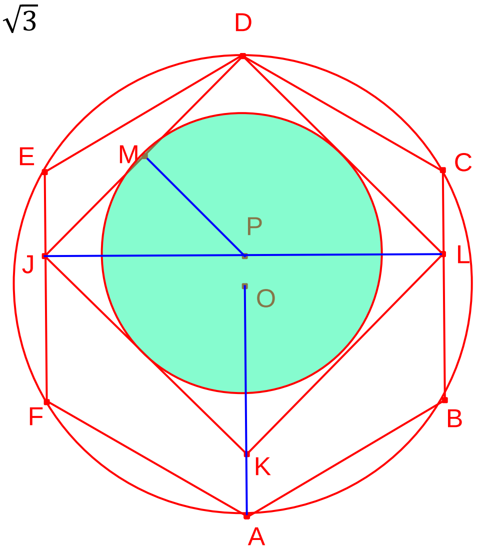
$$\overline{DJ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

El radi de la circumferència inscrita al quadrat és:

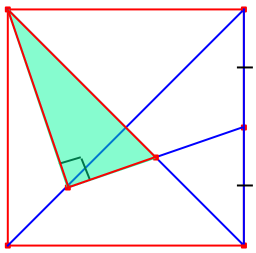
$$r = \overline{PM} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

La proporció entre les àrees dels dos cercles és:

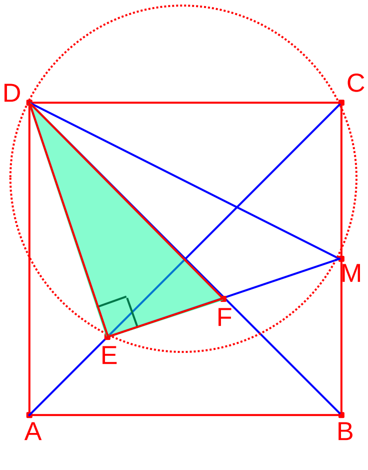
$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{3}{8}$$



5237. La figura està formada per un quadrat, les dues diagonals i un triangle rectangle3.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle rectangle i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=2

DM=sqrt(5)

EMCD cíclic

angleEDM=angleECM=45º

angleEDF=angleCDM

Els triangles DEF, DCM semblants

EF=x, DE=2x

EM=DE=2x

Teorema Pitàgores DEM

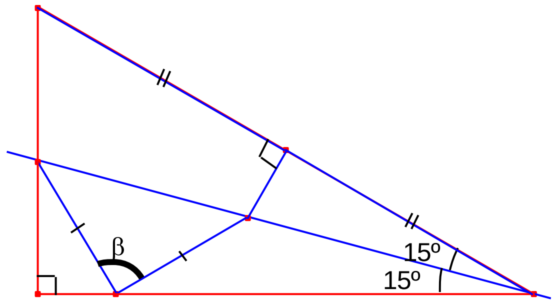
$8x^2=5$

$[DEF]=(1/2)\cdot 2x\cdot x=x^2=5/8$

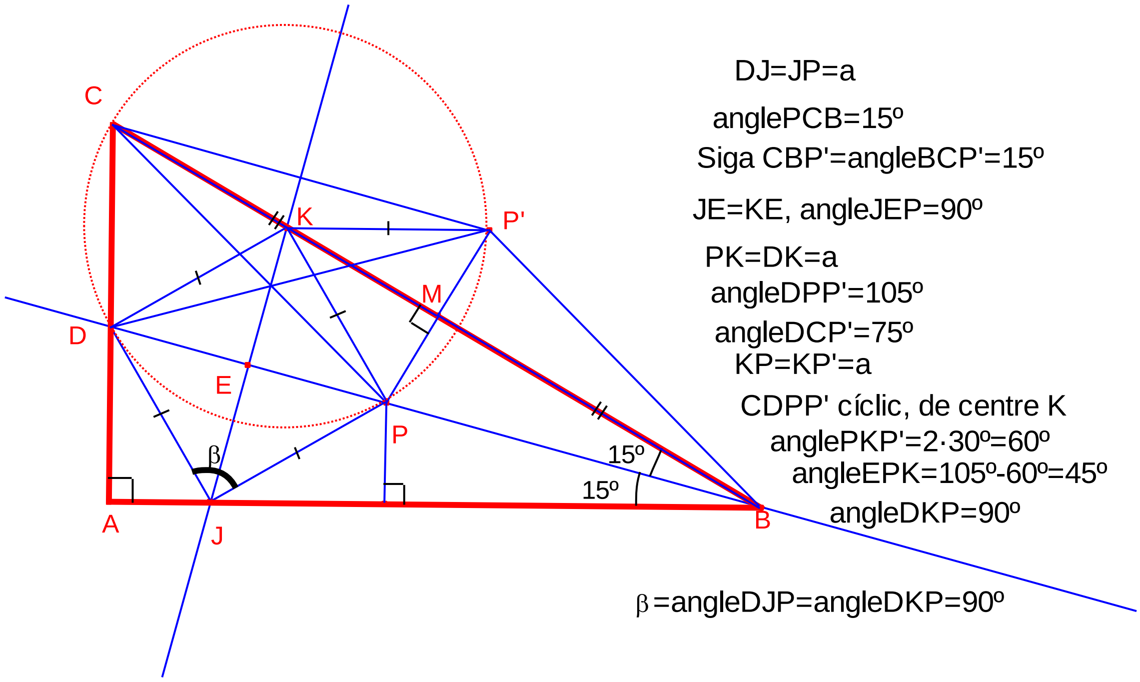
[ABCD]=4

[DEF]/[ABCD]=5/32

5238.- En la figura calculeu la mesura de l'angle β



Solució:



DJ=JP=a

anglePCB=15º

Siga CBP'=angleBCP'=15º

JE=KE, angleJEP=90º

PK=DK=a

angleDPP'=105º

angleDCP'=75º

KP=KP'=a

CDPP' cíclic, de centre K

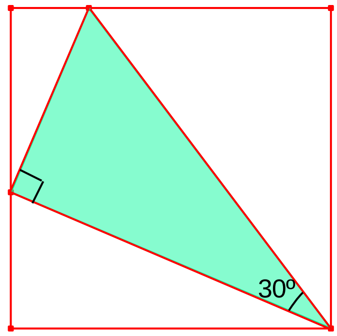
anglePKP'=2·30º=60º

angleEPK=105º-60º=45º

angleDKP=90º

β=angleDJP=angleDKP=90º

5239.- La figura està formada per un quadrat que conté un triangle rectangle amb un angle agut de 30º. Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle rectangle i l'àrea del quadrat.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{LKB}$ de catets $\overline{KL} = c, \overline{KB} = c\sqrt{3}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KAB}, \overset{\Delta}{LDK}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{DK} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AK} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

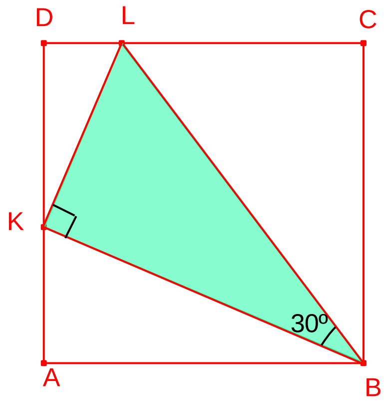
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KAB}$:

$$3c^2 = 1 + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

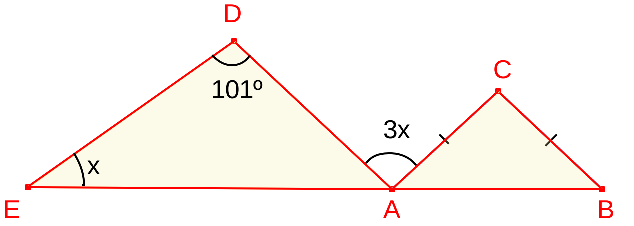
$$c^2 = \frac{7-2\sqrt{3}}{9}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{LKB}$ és:

$$S_{LKB} = \frac{1}{2}\sqrt{3}c^2 = \frac{7\sqrt{3}-6}{18} \approx 0.3402$$



5240.- En la figura $\overline{AC} = \overline{BC}$ i els segments $\overline{AD}, \overline{BC}$ són paral·lels. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

$\angle DAB = 101° + x$

$\angle CAB = \angle ABC = \angle EAD = 101° + x - 3x = 101 - 2x$

$x + 101° + 101° - 2x = 180°$

$x = 22°$