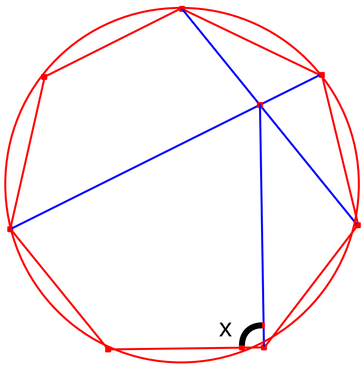
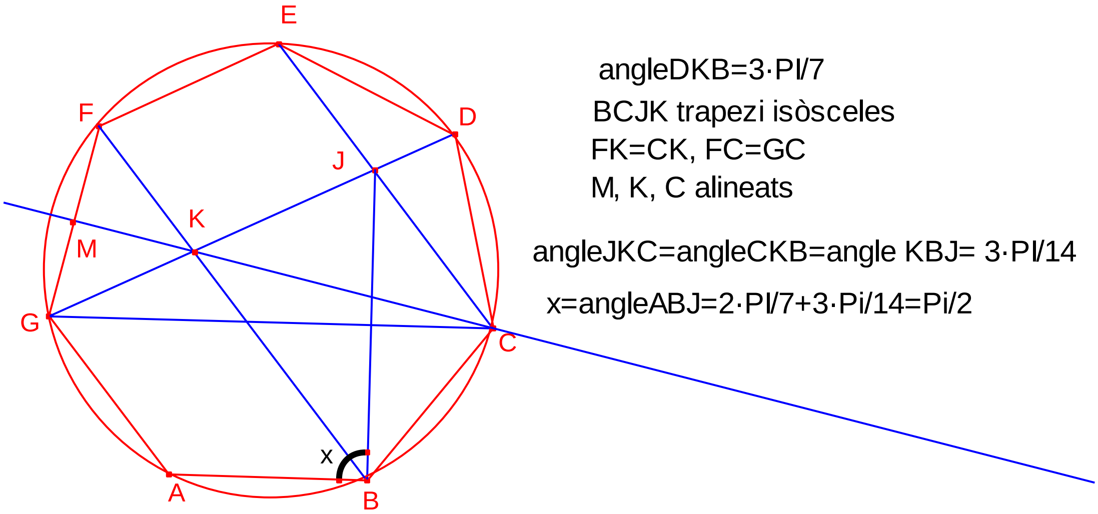
Problemes de Geometria per a l'ESO 526

5251.- La figura està formada per un heptàgon regular, dues diagonals i un segment.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



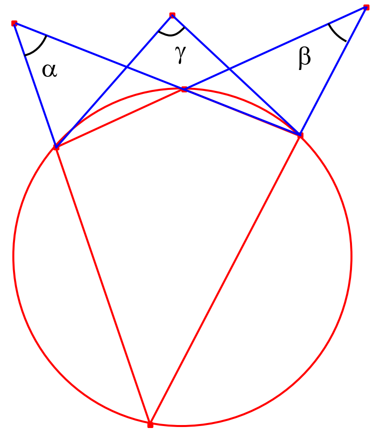
CE, BF paral·lels

angleDKB=3·PI/7
BCJK trapezi isòsceles
FK=CK, FC=GC
M, K, C alineats

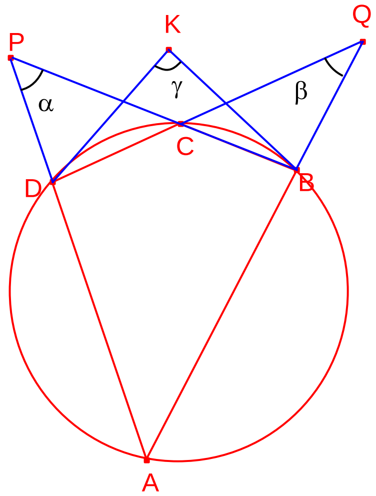
angleJKC=angleCKB=angle KBJ= 3·PI/14

x=angleABJ=2·PI/7+3·Pi/14=Pi/2

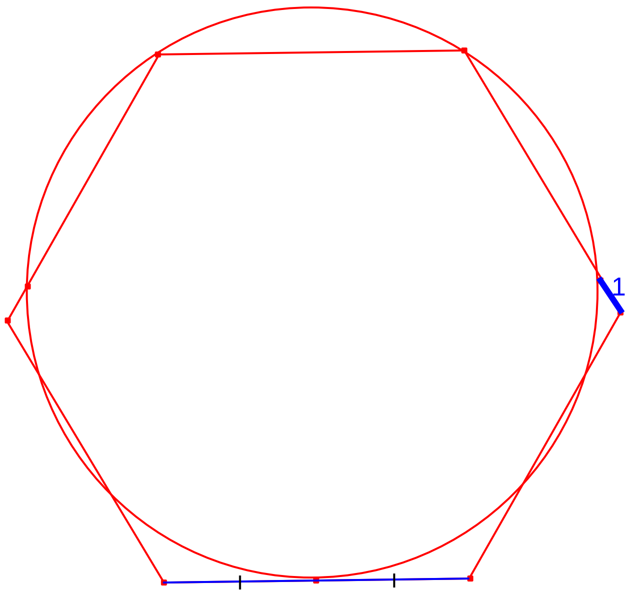
5252.- La figura està formada per un quadrilàter cíclic amb els costats ampliats que formen els angles α, β els costats de l'angle γ són tangents a la circumferència.
Calculeu la mesura de l'angle γ en funció dels angles α, β



Solució:
Siga el quadrilàter inscriptible $ABCD$.
Siguen $\widehat{AD} = x, \widehat{AB} = y, \widehat{BC} = z, \widehat{CD} = t$
$\alpha = y - t, \beta = x - z$
$\gamma = \widehat{DAB} - \widehat{BCD} = x + y - (z + t) = \alpha + \beta$



5253.- La figura està formada per un hexàgon regular i una circumferència. Calculeu el perímetre de l'hexàgon regular.



Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$

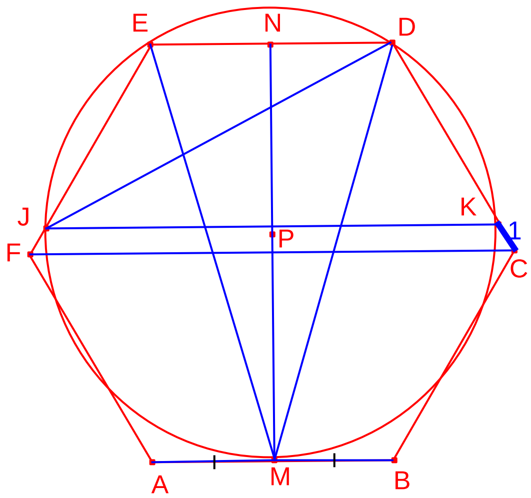
Siga la circumferència de centre P circumscrita el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DEM}$ de radi $\overline{PM} = R$

$\overline{MN} = c\sqrt{3}, \overline{CM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{13}}{2}c$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEM}$ és:

$$S_{DEM} = \frac{1}{2}c \cdot c\sqrt{3} = \frac{c \cdot \frac{13}{4}c^2}{4R}$$

$$2R = \frac{13\sqrt{3}}{12}c$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JED}$:

$$\overline{JD}^2 = c^2 + (c-1)^2 + c(c-1)$$

$$\overline{JD} = \sqrt{3c^2 - 3c + 1}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{JKD}$:

$$\frac{\sqrt{3c^2 - 3c + 1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R = \frac{13\sqrt{3}}{12}c$$

$$\frac{23}{64}c^2 - 3c + 1 = 0$$

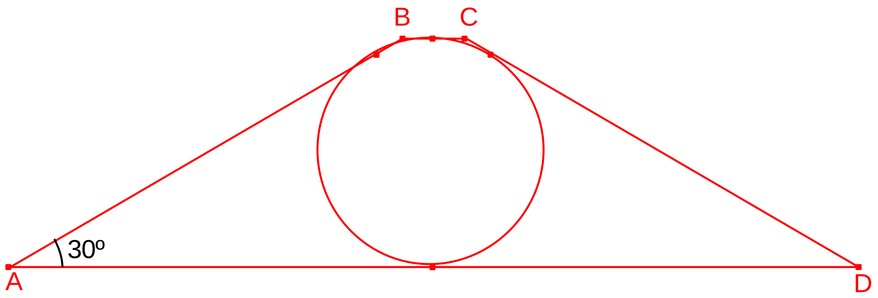
Resolent l'equació:

$c = 8$

El perímetre de l'hexàgon regular és:

$P_{ABCDEF} = 6c = 48$

5254 La figura està formada per un trapezi isòsceles $ABCD$ d'àrea 8 que conté una circumferència inscrita i un angle agut de 30º
Calculeu la mesura del costat $\overline{AB}$

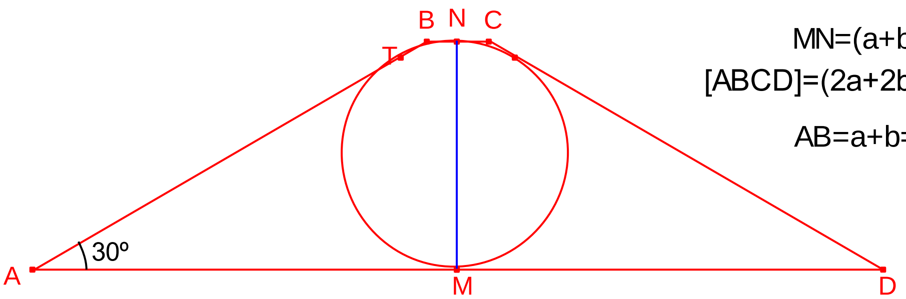


Solució:

BT=BN=a

AT=AM=b

AB=a+b

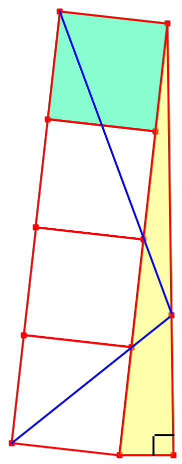


MN=(a+b)/2

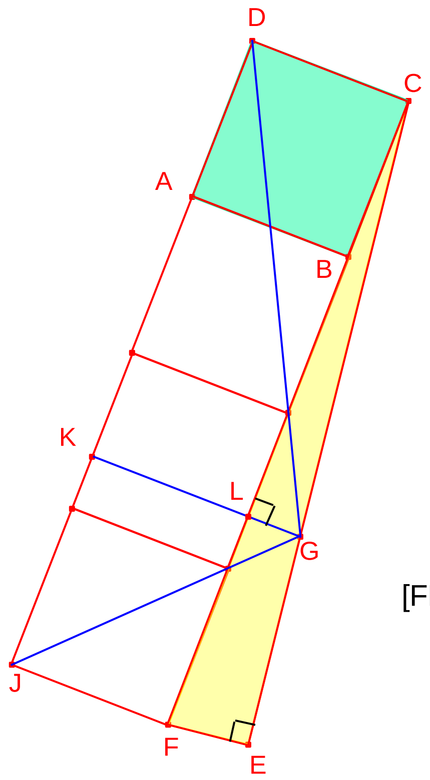
[ABCD]=(2a+2b)/2·(a+b)=8

AB=a+b=4

5255.- La figura està formada per quatre quadrats i un triangle rectangle groc.
Calculeu la proporció entre l’àrea del triangle groc i l’àrea del quadrat verd



Solució:



$AB=1$

$JK=KG=x$

$x/(4-x)=1/2$

$x=4/3$

$DK=8/3$

$LG=1/3$

$FE=a$, $CF=\text{sqrt}(64-a^2)$

Els triangles rectangles FEC, GLC semblants

$a/\text{sqrt}(64-a^2)=1/8$

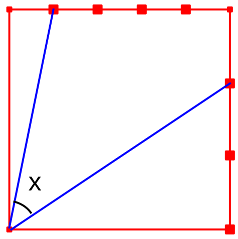
$x=4/\text{sqrt}(65)$

$CE=32/\text{sqrt}(65)$

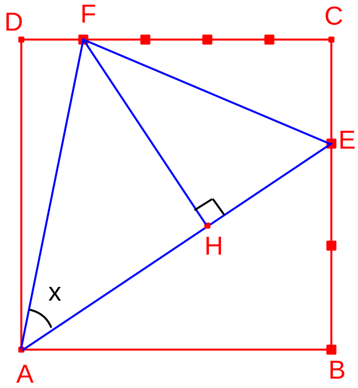
$[FEC]=(1/2)\cdot(4/\text{sqrt}(65))\cdot(32/\text{sqrt}(65))=64/65$

$[FEC]/[ABCCD]=64/65$

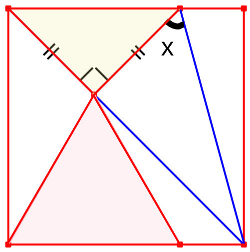
5256.- En la figura, dos costats consecutius d'un quadrat s'han dividit en 5 parts i en 3 parts.
Calculeu la mesura de l'angle x



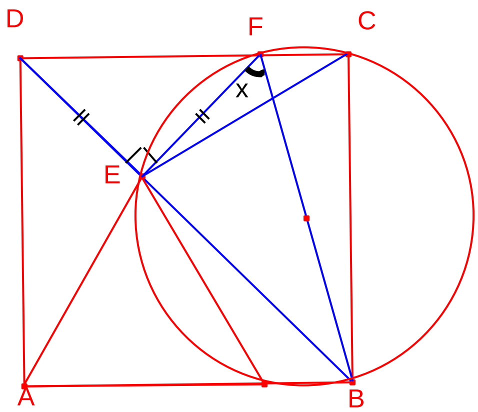
Solució;
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 15$
$\overline{CE} = 5, \overline{BE} = 10, \overline{DF} = 3, \overline{CF} = 12$
$\overline{AF} = 3\sqrt{26}, \overline{AE} = 5\sqrt{13}, \overline{FE} = 13$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és:
$S_{AEF} = S_{ABCD} - (S_{ADF} + S_{ECF} + S_{ABE}) =$
$= 225 - \frac{1}{2}(45 + 60 + 150) = \frac{195}{2}$
$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{13} \cdot \overline{FH}$
$\frac{5}{2}\sqrt{13} \cdot \overline{FH} = \frac{195}{2}$
$\overline{FH} = 3\sqrt{13}$
$\frac{\overline{FH}}{\overline{AF}} = \frac{3\sqrt{13}}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x = 45°$



5257.- La figura està formada per un quadrat un triangle equilàter i un triangle rectangle isòsceles. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



Els triangles AED, CED són iguals

angleECD=angleEAD=30º

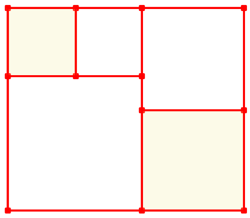
angleFCB=angleFEB=90º

BCFE cíclic

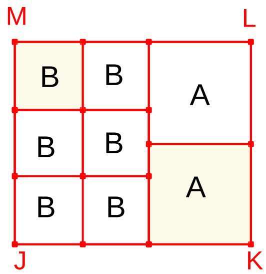
angleFBE=angleFCE=30º

x=angleEFB=60º

5258.- La figura està formada per un rectangle que conté cinc quadrats.
Si l'àrea ombrejada és 54, calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:



$A + B = 54$

$\overline{JM} = 2\sqrt{A} = 3\sqrt{B}$

Elevant al quadrat:

$4A = 9B$

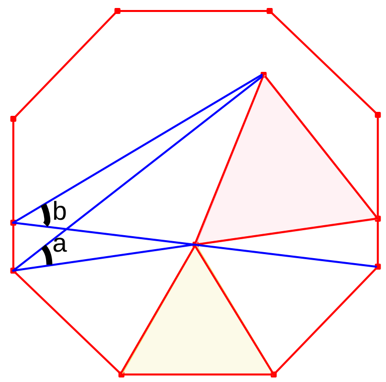
$\frac{9}{4}B + B = 54$

$B = \frac{216}{13}$

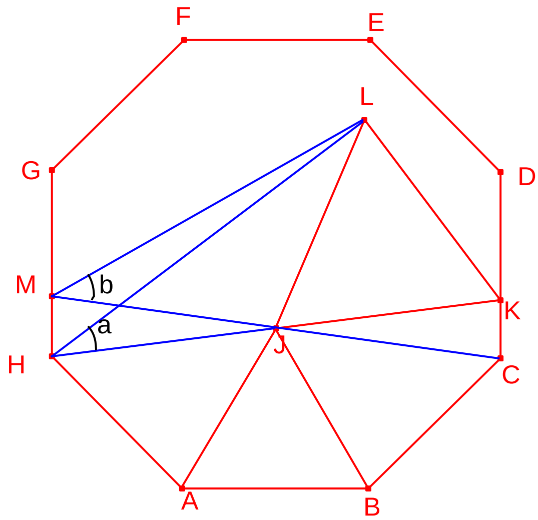
L'àrea del rectangle $JKLM$ és:

$S_{JKLM} = 2A + 6B = \frac{9}{2}B + 6B = \frac{21}{2}B = \frac{2268}{13} \approx 174.4615$

5259.- La figura està formada per un octògon regular i dos triangle equilàters.
Calculeu la mesura dels angles a, b

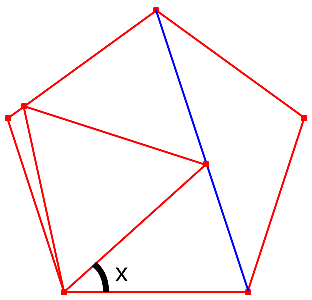


Solució:

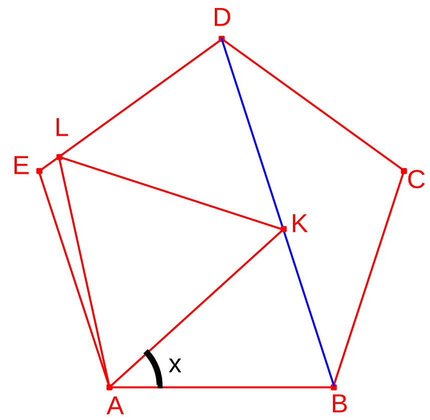


angleHAJ=135º-60º=75º
angleJBC=75º
angleAHJ=angleAJH=105º/2
angleBJC=angleJCB=105º/2
angleCJK=180º-(60º+105º)=15º
angleJCB=135º-105º/2=165º/2
angleJKC=165º/2
JC=JK=JH=JM=JL
angleMJL=180º-15º-60º=105º
b=75º/2
angleHJL=105º+15º=120º
a=30º

5260.- La figura està formada per un pentàgon regular, una diagonal del pentàgon i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga $ABCD$ el pentàgon regular de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{AKL}$ de costat $\overline{AK} = c$
$\angle ABK = 72°, \angle AEL = 108°$
$\angle AKB = 108° - x, \angle EAL = 48° - x, \angle ELA = 24° + x$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:
$$\frac{c}{\sin 72°} = \frac{1}{\sin(108° - x)}$$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ALE}$:
$$\frac{c}{\sin 108°} = \frac{1}{\sin(24° + x)}$$
Dividint ambdues expressions
$\sin(108° - x) = \sin(24° + x)$
$108° - x = 24° + x$
$x = 42°$

Nota:
$\angle DLK = 96° - x = 54°, \angle LKD = 12° + x = 54°$, aleshores, $\overline{DL} = \overline{DK}$, AKDL és un cometa.