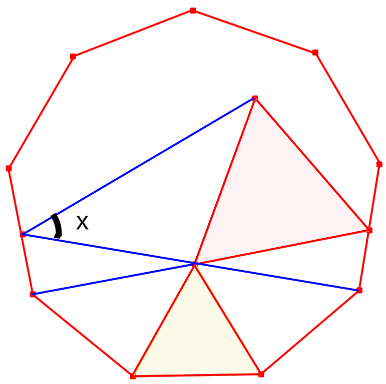
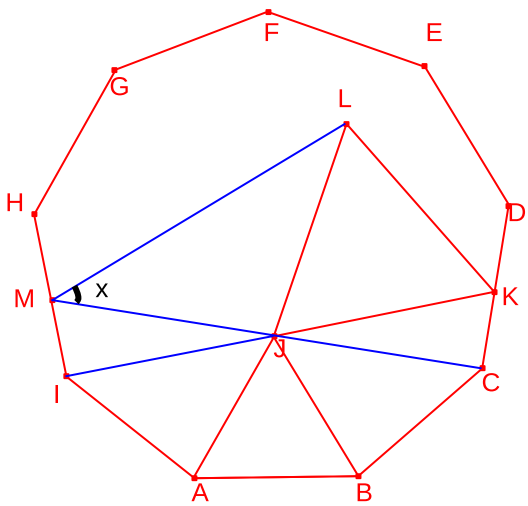
Problemes de Geometria per a l'ESO 527

5261.- La figura està formada per un polígon regular de 9 costats i dos triangles equilàters. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleJBC=80º

angleBJC=angleBCJ=50º

angleJCK=90º

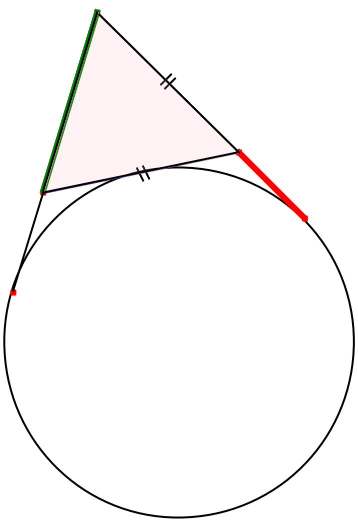
angle KJC=180º-(50º+60º+50)=20º

angleMJL=180º-(60º+20º)=100º

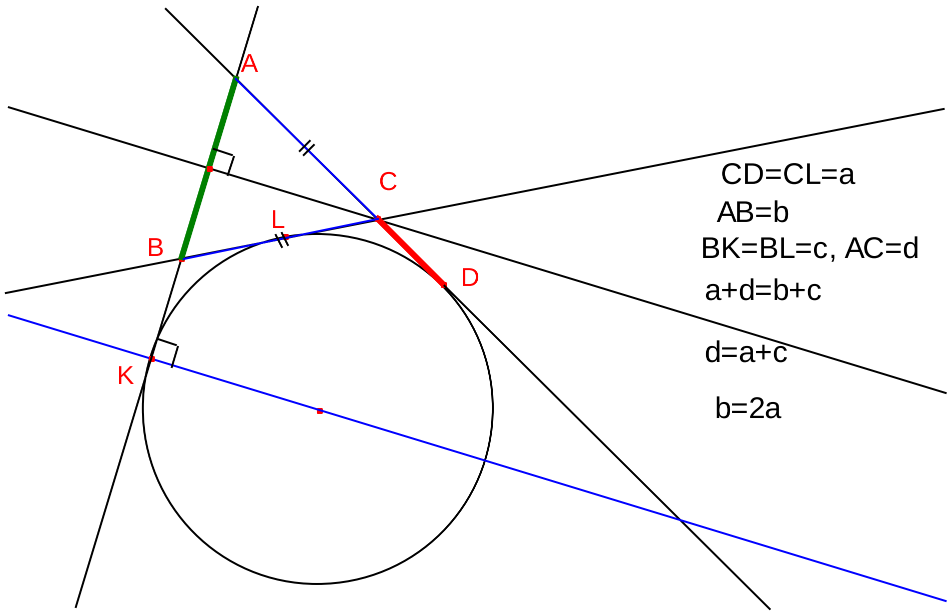
MJ=LK=JL

x=angleLMJ=angleMLJ=40º

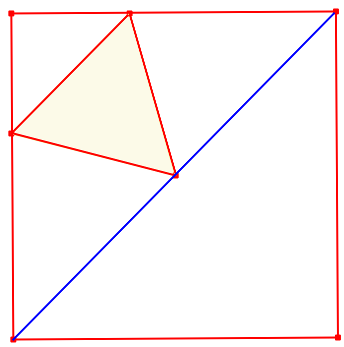
5262.- La figura està formada per una circumferència i tres segments tangents que formen un triangle isòsceles.
Calculeu la proporció entre el segment verd i el segment roig.



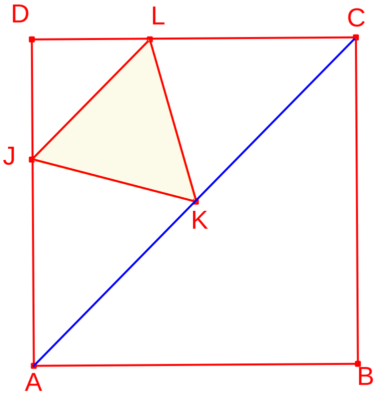
Solució:



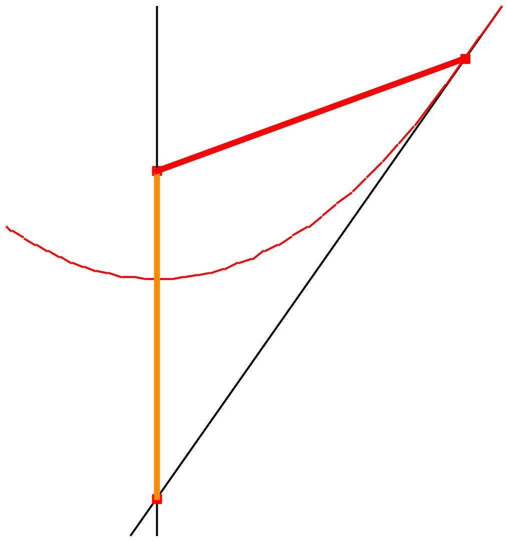
5263.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter que té un vèrtex sobre la diagonal del quadrat.
Calculeu la proporció mínima entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



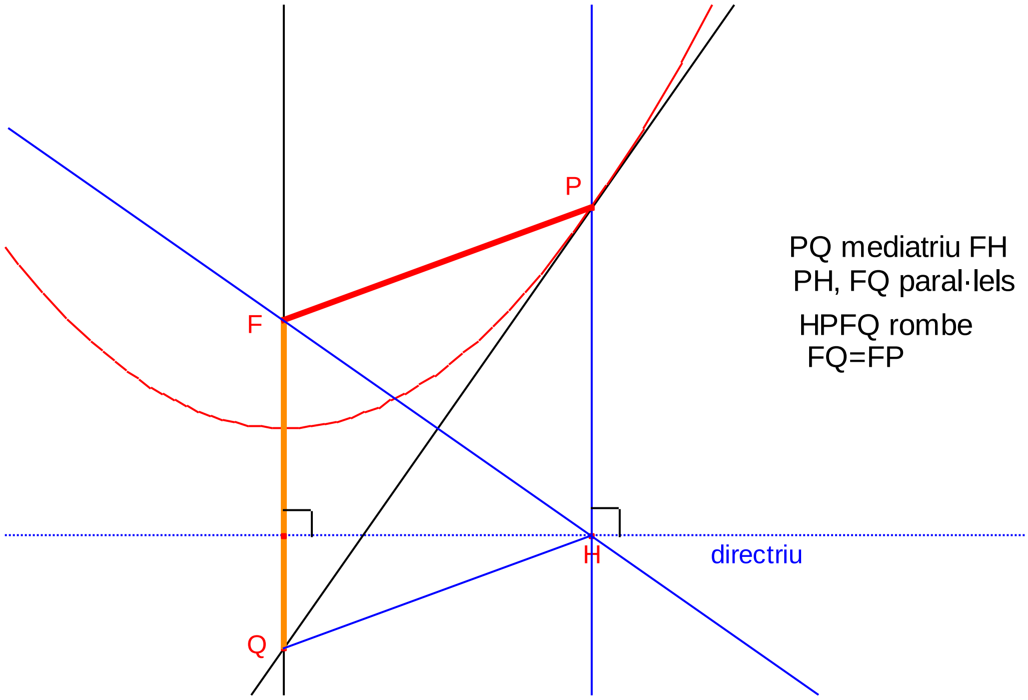
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{JKL}$ de costat $\overline{JK} = c$
Siga $\overline{DJ} = x, \alpha = \angle DJL$
$\overline{AJ} = 1 - x, \angle AKJ = 15° + \alpha$
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{c}, \cos\alpha = \frac{x}{c}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AJK}$:
$$\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-x}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{x}{c} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{c}}$$
$$(2+\sqrt{3})c^2 = 2(2+\sqrt{3})x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + 2$$
El mínim de l'àrea del triangle s'assoleix amb el mínim de la funció:
$$f(x) = (2+\sqrt{3})x^2 - (1+\sqrt{3})x + 1$$
La funció és una paràbola. El mínim s'assoleix quan:
$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
L'àrea mínima és:
$$S_{JKL} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(2x^2 - 2\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}x + \frac{2}{3+\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}$$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{JKL}}{S_{ABCD}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}$$



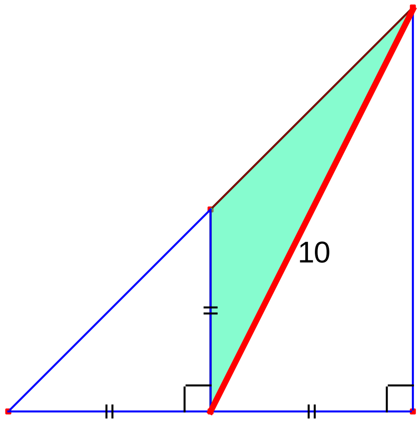
5264.- La figura està formada per una paràbola, el seu eix de simetria i una tangent.
El segment groc connecta el focus amb el punt d'intersecció.
El segment roig connecta el focus amb el punt de tangència.
Calculeu la proporció entre les longituds dels dos segments.



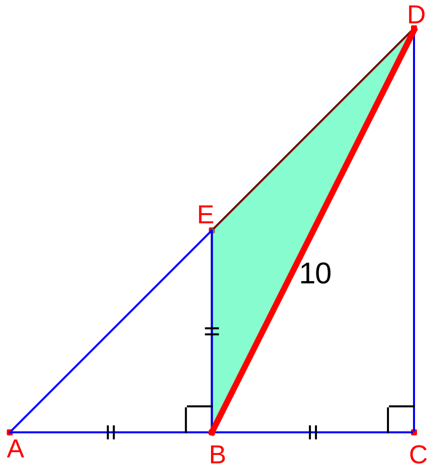
Solució:



5265.- En la figura calculeu l’àrea del triangle ombrejat.

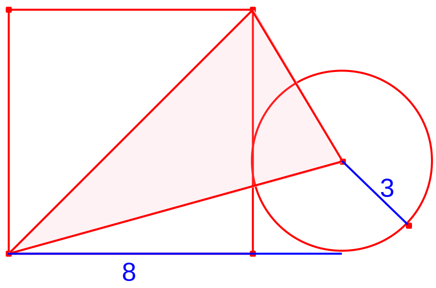


Solució:
Siguen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BE} = a$
$\overline{CD} = \overline{AC} = 2a$

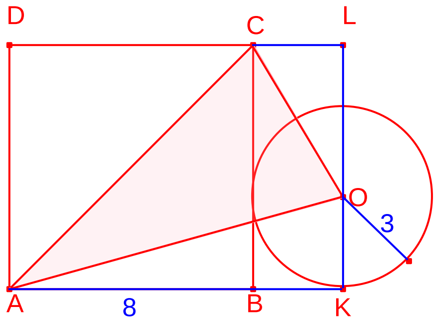


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$100 = 5a^2$
$a^2 = 20$
L’àrea del triangle ombrejat és:
$S_{BDE} = S_{ACD} - (S_{ABE} + S_{BCD}) =$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a - \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a\right) = \frac{1}{2}a^2 =$$
$$= 10$$

5266.- La figura està formada per un quadrat de costat 8 i una circumferència de radi 3 tangent a dos costats del quadrat. Calculeu l’àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 8$

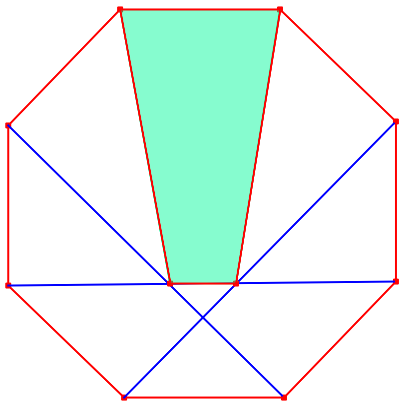
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = 3$

$\overline{BK} = 3, \overline{OL} = 5, \angle AKL = 90°$

L’àrea del triangle ombrejat és:

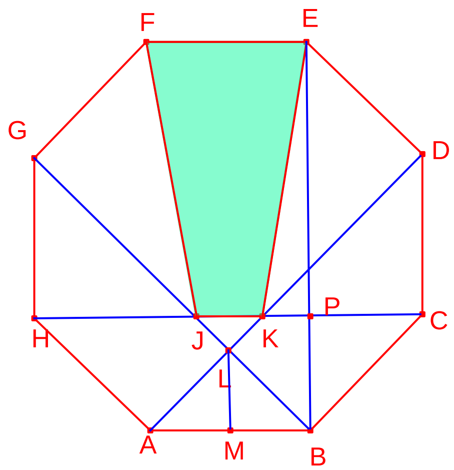
$$S_{AOC} = S_{AKLC} - (S_{AKO} + S_{CLO}) = \frac{11+3}{2} \cdot 8 - \left(\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3\right) = 32$$

5267.- La figura està formada per un octògon regular i tres diagonals.
Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter ombrejat i l'octògon.



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = 1$

$\overline{BP} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{LM} = \frac{1}{2}, \overline{BE} = 1 + \sqrt{2}, \overline{PE} = 1 + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$



Els triangles $\overset{\Delta}{ABL}, \overset{\Delta}{JKL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{JK}}{1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{JK} = \sqrt{2} - 1$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{EFJK} = \frac{1 + \sqrt{2} - 1}{2} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

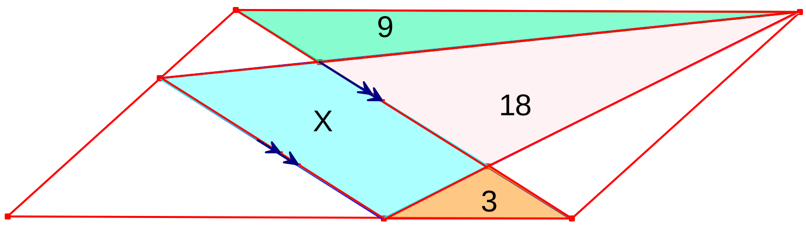
L'àrea de l'octògon regular és:

$$S_{ABCDEFGH} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 1^2 = 2 + 2\sqrt{2}$$

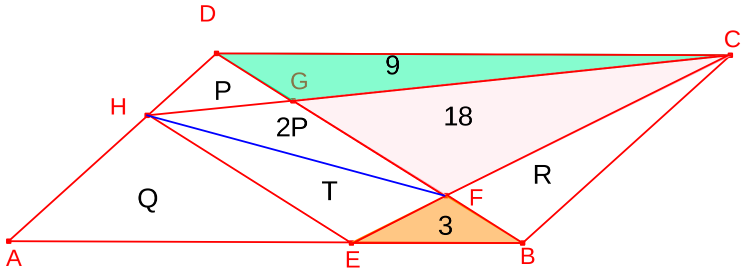
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{EFJK}}{S_{ABCDEFGH}} = \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{2+2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

5268.- La figura està formada per un paral·lelogram que està dividit en diverses àrees.
Calculeu l'àrea del trapezi X



Solució:



X=2P+T

EBF, CDF semblants

CD/BE=3

[DFE]=3P, [DHE]=T

R/3 = 27/(3P)

R=27/P

[AED]=2·[EBD]

27+R=3P+T+Q+3

(3P+3)/T+Q)=2

R=9P-18

27/P = 9P-18

P=3, R=9

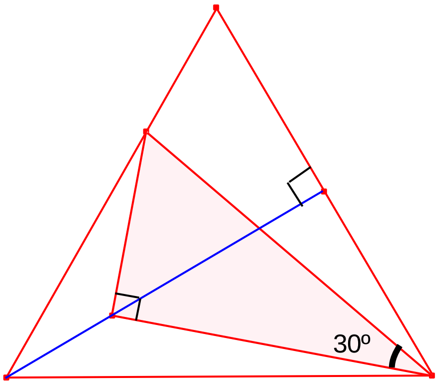
AH/DH=2

T+Q=24, T/Q=1/2

T=8, Q=16

X=14

5269.- La figura està formada per un triangle equilàter que conté un triangle rectangle amb l'angle recte sobre l'altura del triangle rectangle, i un angle agut de 30º
Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea del triangle equilàter.

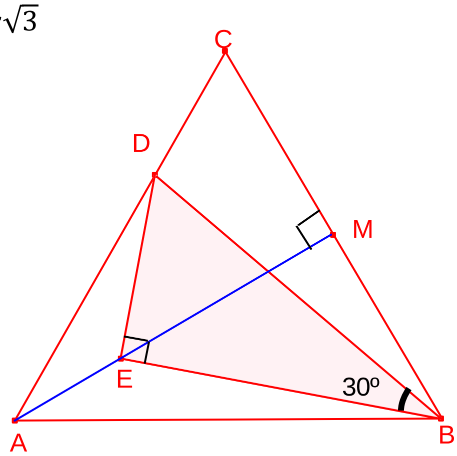


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BED}, E = 90°, \overline{DE} = c, \overline{BD}02c, \overline{BE} = c\sqrt{3}$

Siga $\beta = \angle ABE$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\frac{c\sqrt{3}}{\sin 30°} = \frac{1}{\sin(30° + \beta)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\frac{2c}{\sin 60°} = \frac{1}{\sin(90° - \beta)} = \frac{1}{\cos \beta}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{3}{2} = \frac{\cos \beta}{\sin(30° + \beta)}$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\cos \beta = \frac{9}{\sqrt{84}}$$

$$c = \frac{\sqrt{7}}{6}$$

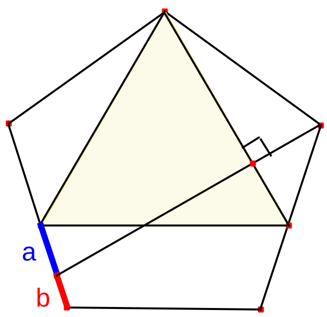
$$S_{BED} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot c\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{72}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

La proporció d'àrees és::

$$\frac{S_{BED}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{72}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{7}{18}$$

5270.- La figura està formada per un pentàgon regular i un triangle equilàter.
Calculeu $a : b$



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$$\overline{AC} = \overline{AD} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{FGD}$

$\angle FDA = 12°, \angle PCA = 6°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADF}$

$$\frac{a+b}{\sin 12°} = \frac{\Phi}{\sin 132°}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACP}$

$$\frac{b}{\sin 12°} = \frac{\Phi}{\sin 102°}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{a+b}{b} \cdot \frac{\sin 6°}{\sin 12°} = \frac{\sin 78°}{\sin 48°}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin 12°}{\sin 6°} \cdot \frac{\sin 78°}{\sin 48°} = \frac{1}{4 \cdot \sin 6° \cdot \cos 24°} = \frac{1}{2(-\sin 18° + \sin 30°)} = \frac{1}{-\frac{1}{\Phi} + 1} = \Phi^2$$

$$\frac{a}{b} = \Phi^2 - 1 = \Phi$$