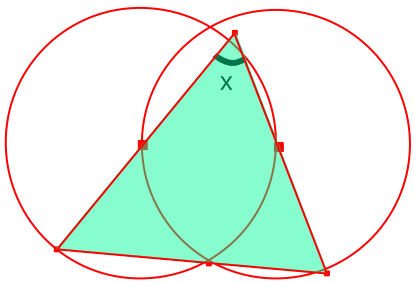
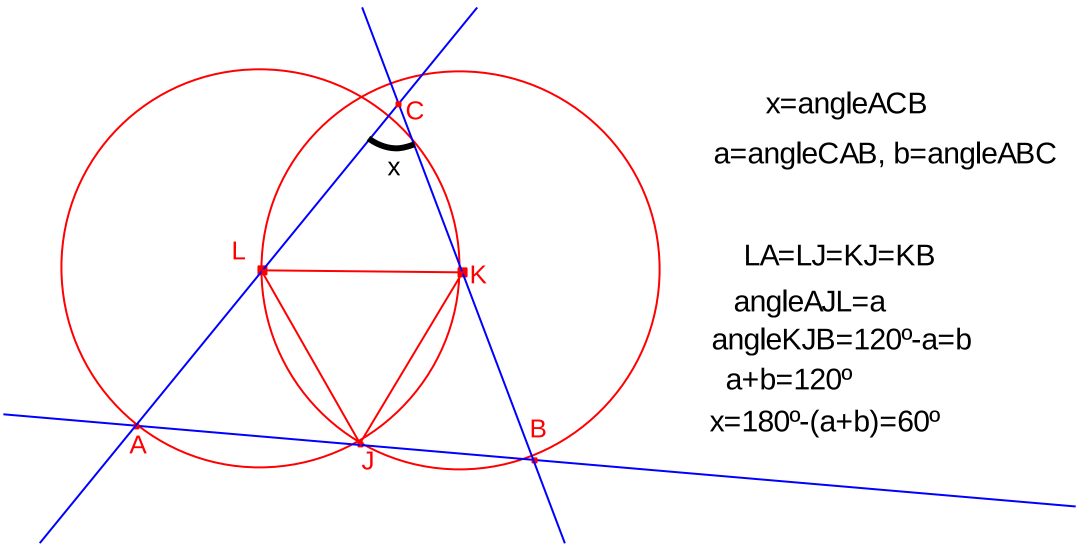
Problemes de Geometria per a l'ESO 528

5271.- La figura està formada per dues circumferències que es tallen un dues c circumferències que passa pels seus centres i un punt d'intersecció.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



x=angleACB

a=angleCAB, b=angleABC

LA=LJ=KJ=KB

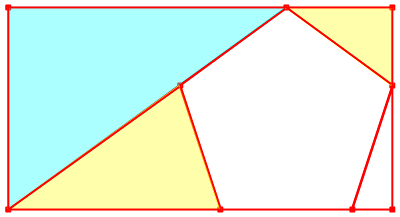
angleAJL=a

angleKJB=120º-a=b

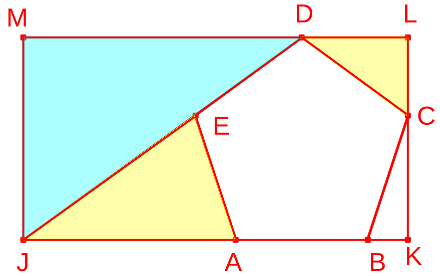
a+b=120º

x=180º-(a+b)=60º

5272.- La figura està formada per un rectangle que conté un pentàgon regular.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$
$\angle MDJ = \angle LDC = \angle EJA = 36°$



$\overline{JA} = \overline{JE} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\overline{DL} = \cos 36° = \frac{\Phi}{2}$

$\overline{JD} = 1 + \Phi = \Phi^2$

$\overline{MD} = \Phi^2 \cdot \cos\Phi = \frac{1}{2}\Phi^3$

L'àrea blava és:

$$S_{blava} = \frac{1}{2} \cdot \Phi^2 \cdot \frac{1}{2}\Phi^3 \cdot \sin 36° = \frac{\Phi^5}{4} \cdot \sin 36°$$

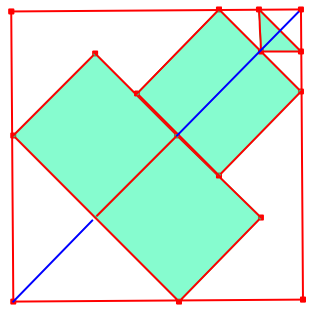
L'àrea groga és:

$$S_{groga} = S_{JAE} + S_{CDL} = \frac{1}{2}\Phi^2 \cdot \sin 36° + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi}{2} \cdot \sin 36° =$$
$$= \frac{1}{4}(2\Phi^2 + \Phi)\sin 36° = \frac{\Phi^4}{4}. \sin 36° \cdot$$

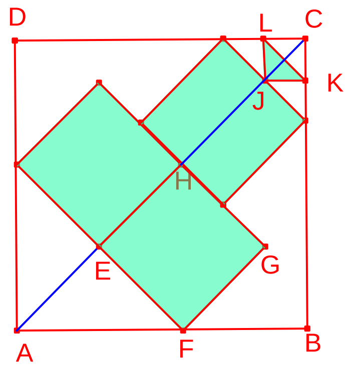
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{blava}}{S_{grega}} = \Phi$$

5273.- La figura està formada per un quadrat que conté tres quadrats iguals i un triangle rectangle.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de cpstat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = c$
$\overline{AE} = \overline{HJ} = c$



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{LJK}, J = 90°, \overline{JK} = \overline{JL} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} c$

$\overline{JC} = \frac{1}{2} c$

$\overline{AC} = \sqrt{2} = 3c + \frac{1}{2} c$

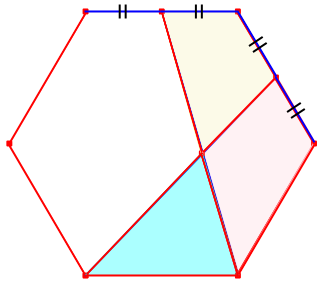
Resolent l’equació:

$c = \frac{2\sqrt{2}}{7}$

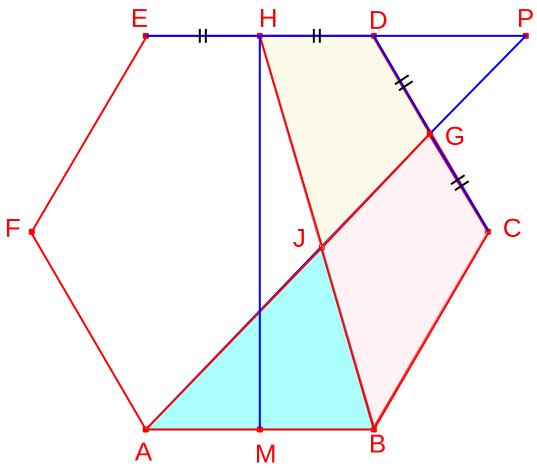
L’àrea ombrejada és:

$S_{ombrejada} = 3 \cdot S_{EFGH} + S_{JKL} = 3c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} c^2 = \frac{49}{16} \cdot c^2 = \frac{1}{2}$

5274.- La figura està formada per un hexàgon regular i dos segments.
Calculeu la proporció entre cadascuna de les àrees ombrejades i l'àrea de l'hexàgon regular.

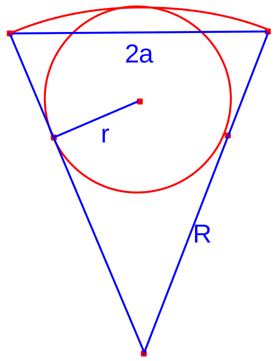


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$
La seua àrea és, $S_{ABCDEF} = 6\sqrt{3}$
Siga $\alpha = \angle ABH = \angle DHB = \angle CGA$, Aleshores, $\angle AJB = 60°$
$\overline{HM} = 2\sqrt{3}$
$\overline{BH} = \sqrt{13}$
Siga $\overline{BJ} = x, \overline{JG} = y$
$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABJ}$:
$\frac{x}{\sin(60° + \alpha)} = \frac{2}{\sin 60°}$
$x = \overline{BJ} = \frac{6\sqrt{13}}{13}, \overline{HJ} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABJ}$ és:
$S_{ABJ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot \sin\alpha = \frac{12}{13}\sqrt{3}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABJ}, \overset{\Delta}{PHJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales: $\frac{\overline{HP}}{2} = \frac{7}{6}$
$\overline{HP} = \frac{7}{3}, \overline{DP} = \frac{4}{3}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PHJ}$ és: $S_{PHJ} = \left(\frac{\frac{7}{3}}{2}\right)^2 \cdot S_{ABJ} = \frac{49\sqrt{3}}{39}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DPG}$ és: $S_{DPG} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
L'àrea del quadrilàter $JGDH$ és:
$S_{JGDH} = S_{PHJ} - S_{DPG} = \frac{49\sqrt{3}}{39} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{12}{13}\sqrt{3}$
Les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABJ}$ i del quadrilàter $JGDH$ són iguals.
Aplicant el teorema del cosinus al t triangle $\overset{\Delta}{ABJ}$:
$\overline{AJ}^2 = 4 + \frac{36}{13} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{6\sqrt{13}}{13}\frac{1}{\sqrt{13}}$
$\overline{AJ} = \frac{8}{\sqrt{13}}, y = \overline{JG} = \sqrt{13} - \overline{AJ} = \frac{8}{\sqrt{13}}$
L'àrea del quadrilàter $BCGJ$ és:
$S_{BCGJ} = S_{GJB} + S_{BCG} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}xy \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{14}{13}\sqrt{3}$
Les proporcions de les àrees són:
$\frac{S_{ABJ}}{S_{ABCDEF}} = \frac{S_{JGDH}}{S_{ABCDEF}} = \frac{2}{13}, \frac{S_{BCGJ}}{S_{ABCDEF}} = \frac{7}{39}$



5275.- La figura està formada per una circumferència de radi r, un sector de radi R tangent a la circumferència.
Proveu que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{R}$$



Solució:

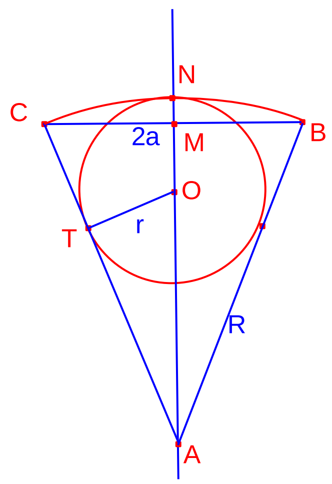
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMC}, \overset{\Delta}{ATO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{R}{a} = \frac{R-r}{r}$$

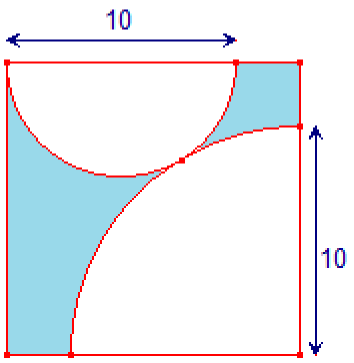
$$\frac{1}{a} = \frac{R-r}{rR} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$$

Aleshores,

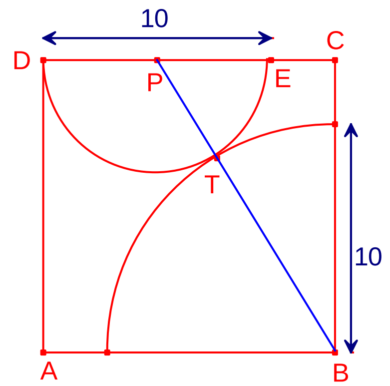
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{R}$$



5276.- La figura està formada per un quadrat que conté un quadrant de radi 10 i un semicercle de diàmetre 10.
Calculeu l'àrea ombrejada.

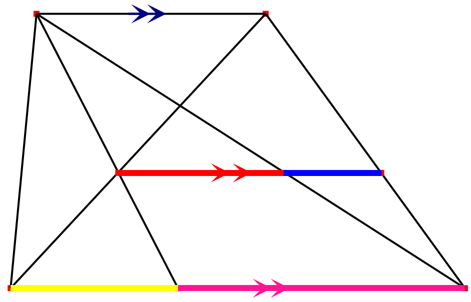


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrant de centre B i radi $\overline{BT} = 10$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PD} = \overline{PT} = 5$
$\overline{PC} = c - 5$

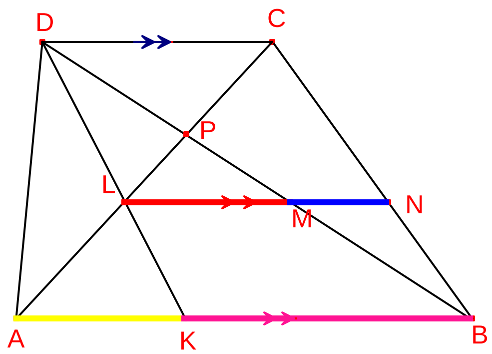


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCP}$:
$15^2 = c^2 + (c-5)^2$
$c^2 - 5c - 100 = 0$
$c = \frac{5}{2}\left(1 + \sqrt{17}\right)$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = \frac{25}{4}\left(18 + 2\sqrt{17}\right) - \left(\frac{\pi}{4} \cdot 100 + \frac{\pi}{2} \cdot 25\right) = \frac{25}{2}\left(9 + \sqrt{17} - 3\pi\right) \approx 46.2291$

5277.- La figura està formada per un trapezi, les seues diagonals i un segment a les bases.
Proveu que $groc : morat = blau : roig$



Solució:



AK=a, KB=b

NM=c, LM=d

CD=x, DL=y, KL=z

AKL, CDL semblants

x=(y/z)a

DLM, DKB semblants

b/d = (y+z)/y

DLM, DKB semblants

BM/z = BD/z+y

CDB, NMB semblants

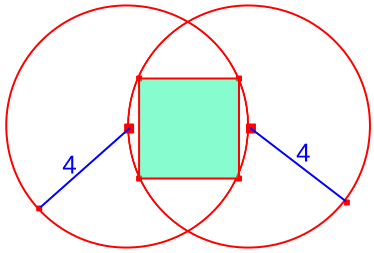
x/c = BD/BM = (y+z)/z

a/c = (y+z)/y

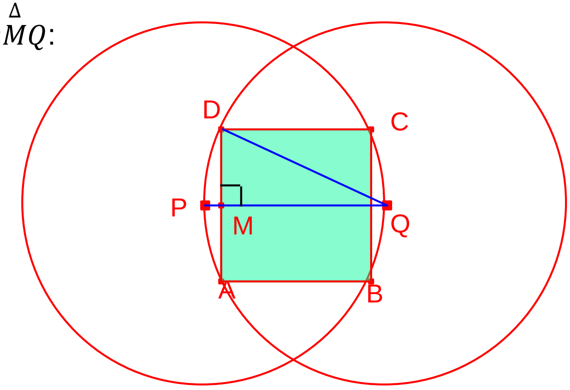
b/d = a/c

a/b = c/d

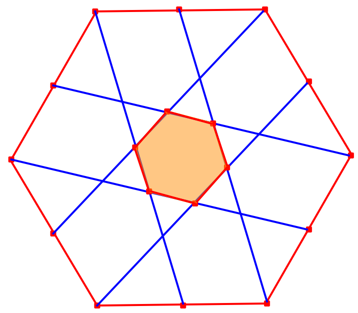
5278.- La figura està formada per dues circumferències de radi 4.
Calculeu l'àrea del quadrat inscrit en la intersecció de les dues circumferències.



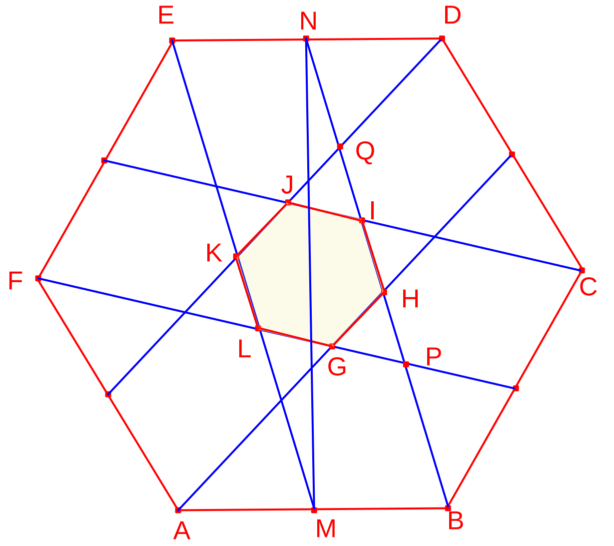
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{QD} = 4, \overline{QM} = \dfrac{4+c}{2}, \overline{DM} = \dfrac{c}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMQ}$:
$16 = \dfrac{1}{4}c^2 + \dfrac{1}{4}(4+c)^2$
Simplificant:
$c^2 + 4c - 24 = 0$
Resolent l'equació:
$c = 2\left(\sqrt{7} - 1\right)$
L'àrea del quadrat és:
$S_{ABCD} = c^2 = 4\left(\sqrt{7} - 1\right)^2 = 8\left(4 - \sqrt{7}\right) \approx 10.8340$



5279.- La figura està formada per dos hexàgons regulars.
Calculeu la proporció entre les seues àrees.

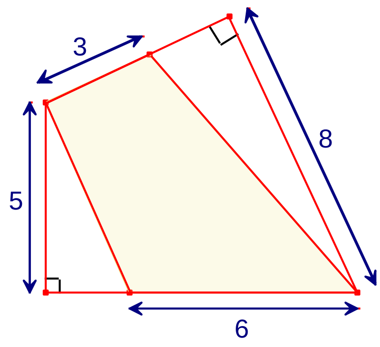


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$
$\overline{MN} = 2\sqrt{3}$
Siga l'hexàgon regular $GHIJKL$ de costat $\overline{GH} = c$
$\overline{QI} = \overline{HP} = \overline{HI} = c$

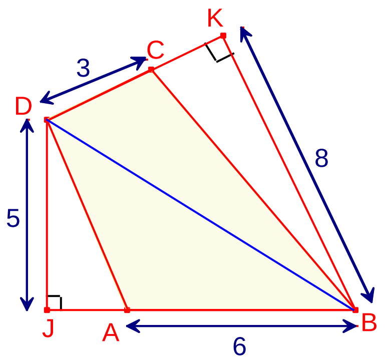


Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NMB}$:
$\overline{BN} = \sqrt{13}$
$\angle NQD = 60°$
Siga $\angle MBN = \angle DNB = \alpha$
$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$
Siguen $\overline{NQ} = x, \overline{DQ} = \overline{BP} = y$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DNQ}$:
$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y}{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}$$
$$y = \frac{4}{\sqrt{13}}$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DNQ}$:
$$1 = \frac{16}{13} + x^2 - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{13} \cdot x} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}$$
Simplificant:
$$x^2 - \frac{8}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{13} = 0$$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{3}{\sqrt{13}}$$
$$\overline{BN} = \sqrt{13} = 3c + \frac{7}{\sqrt{13}}$$
$$c = \frac{2}{\sqrt{13}}$$
La proporció entre les àrees dels dos hexàgons regulars és:
$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{13}$$

5280.- Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat de la figura.



Solució:



L'àrea del quadrilàter $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CDB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \overline{JD} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \overline{KB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 27$$