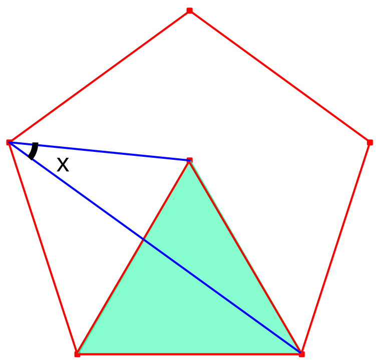
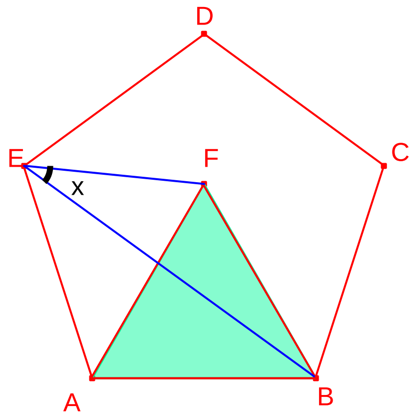
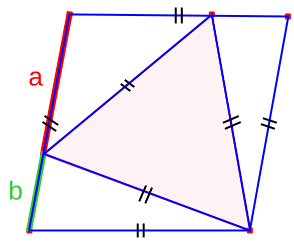
5281.- La figura està formada per un pentàgon regular i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
$\angle EAF = 108° - 60° = 48°$
$\angle AEB = 36°$
$\angle AEF = \angle AFE = \dfrac{180° - 48°}{2} = 66°$
$x = \angle FEB = 66° - 36° = 30°$



5282.- La figura està formada per un rombe que conté un triangle equilàter que tenen tots dos els costats iguals.
Si $a = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ calculeu la mesura del segment b



Solució:
Siga el rombe $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a + b$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BEF}$ de costat $\overline{BE} = a + b$
Siga $\alpha = \angle ABF$

$$\angle ABC = \frac{\pi}{3} + 2\alpha$$

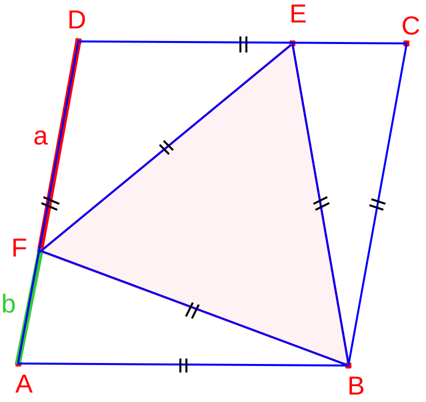
$$\angle BAF = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\alpha + \frac{\pi - \alpha}{2} = \pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{9}$$

$$\angle DFE = \angle DEF = \frac{2\pi}{9}$$

$$\angle FDE = \frac{5\pi}{9}$$



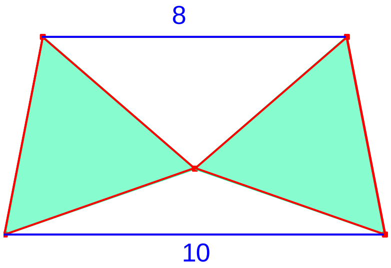
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{FDE}$:

$$\frac{a + b}{\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)} = \frac{a}{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}$$

$$\frac{a + b}{2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)} = a$$

$$b = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) a - a = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

5283.- En la figura, els dos triangles ombrejats són iguals i equilàters.
Calculeu la seua àrea.



Solució:

Siguen els triangles equilàters iguals $\overset{\Delta}{AKD}, \overset{\Delta}{BKC}$ de costat $\overline{AK} = \overline{BK} = c$

Siga $\alpha = \angle KAB = \angle KBA$

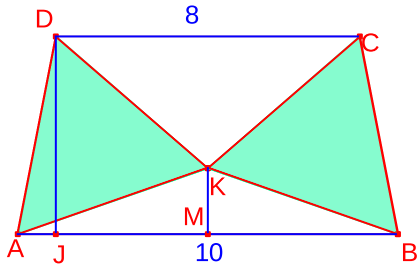
$\angle AKB = 180° - 2\alpha$

$\angle CKD = 600° - \alpha$

$\angle KCD = \angle KDC = 60° - \alpha$

$\angle DAB = 60° + \alpha, \angle ADC = 120° - \alpha$

Aleshores, $ABCD$ és un trapezi.



$$\frac{1}{c} = \cos(60° + \alpha)$$

$$\frac{5}{c} = \cos\alpha$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$3 \cdot \cos\alpha = 5\sqrt{3} \cdot \sin\alpha$$

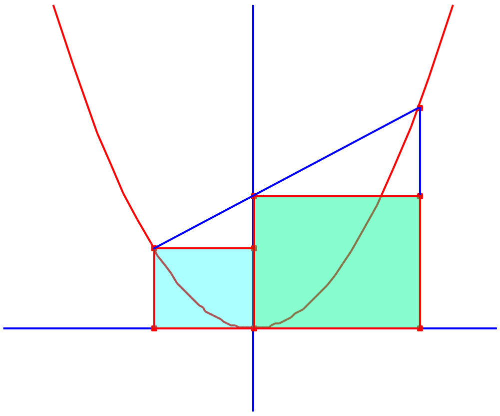
$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}, \cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$c = 2\sqrt{7}$$

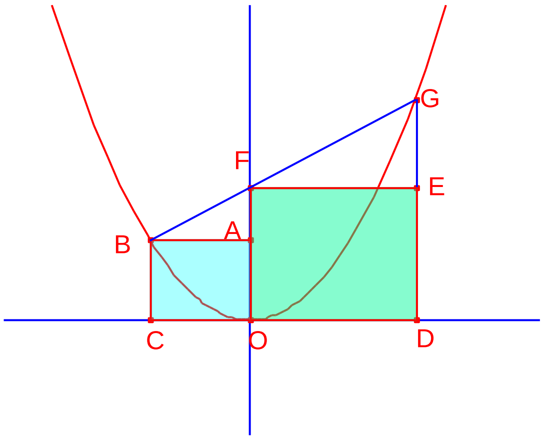
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 14\sqrt{3} \approx 24.2487$$

5284.- En la figura, el vèrtex d'una paràbola és el vèrtexs comú de dos rectangles.
Proveu que els rectangles són semblants.



Solució:
Siga la paràbola $y = x^2$
Siguen $\overline{CO} = a, \overline{BC} = b, \overline{OD} = c, \overline{DE} = d$
$a^2 = b, c^2 = \overline{DG}$
$\overline{AF} = d - b$



Els triangles rectangles $B\overset{\Delta}{A}F, F\overset{\Delta}{E}G$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{GE} = \frac{(d-b)c}{a}$$

$$\overline{DG} = d + \frac{(d-b)c}{a} = \frac{(a+c)d - bc}{a}$$

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{b}{\frac{(a+c)d - bc}{a}}$$

$$\frac{a}{c^2} = \frac{b}{(a+c)d - bc}$$

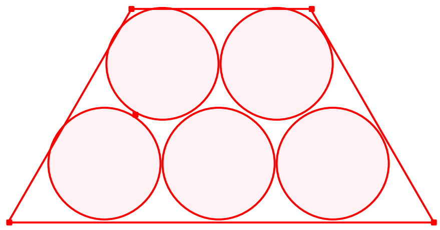
$$ad(a+c) - abc = bc^2$$

$$ad(a+c) = bc(c+a)$$

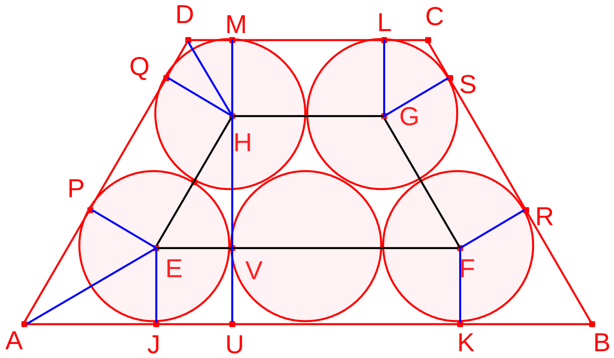
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Els rectangles $COAB, ODEF$ són semblants.

5285.- Un quadrilàter conté cinc circumferències de radi 5 tangents dos a dos.
Calculeu el perímetre i l'àrea del quadrilàter.



Solució:



Els centres E, F, G, H de la circumferència formen un trapezi isòsceles d'angles aguts de 60º
El quadrilàter $ABCD$ és un trapezi ja que té els costats paral·lels al trapezi $EFGH$

$\overline{AJ} = \overline{AP} = 5\sqrt{3}$

$\overline{DM} = \overline{DQ} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\overline{AB} = 20 + 10\sqrt{3}, \overline{CD} = 10 + \frac{10\sqrt{3}}{3}, \overline{AD} = \overline{BC} = 10 + \frac{20\sqrt{3}}{3}$

El perímetre del trapezi $ABCD$ és:

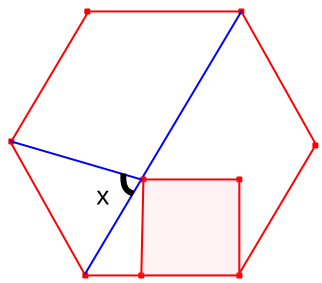
$$P_{ABCD} = 20 + 10\sqrt{3} + 10 + \frac{10\sqrt{3}}{3} + 2\left(10 + \frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{10}{3}\left(15 + 8\sqrt{3}\right) \approx 96.1880$$

$\overline{HV} = 5\sqrt{3}, \overline{UM} = 10 + 5\sqrt{3}$

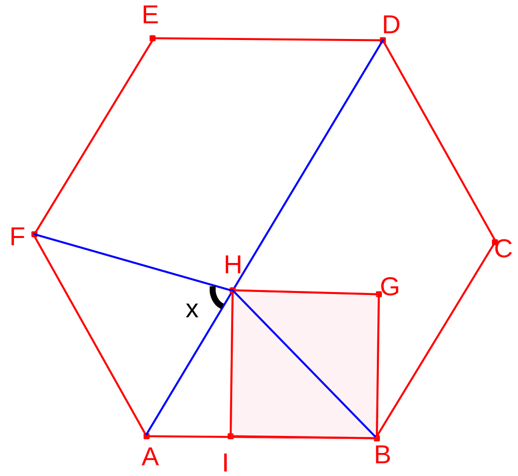
L'àrea del trapezi $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = \frac{20 + 10\sqrt{3} + 10 + \frac{10\sqrt{3}}{3}}{2} \cdot \left(10 + 5\sqrt{3}\right) = \frac{25}{3}\left(30 + 17\sqrt{3}\right) \approx 495.3739$$

5286.- La figura està formada per un hexàgon regular, una diagonal de l'hexàgon i un quadrat. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



AD mediatriu de BF

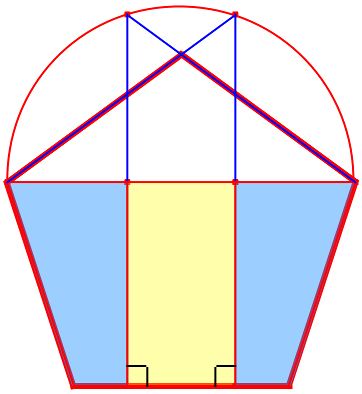
FH=BH

angle HAB=aangleFAH=60º

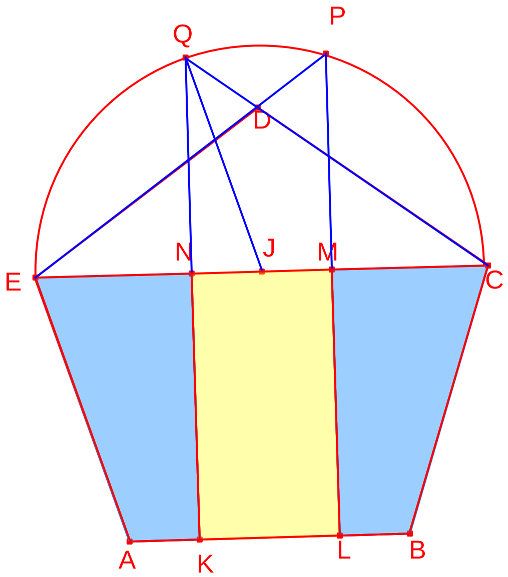
angleABH=45º

x=angleAHF=angleAHB=75º

5287.- La figura està formada per un pentàgon regular i una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga



Solució:



AB=1

CE= Φ

JQ= Φ /2

angleEJQ=72º

JN= Φ/2·cos72º=1/4

MN=1/2

EN=Φ /2-(1/2

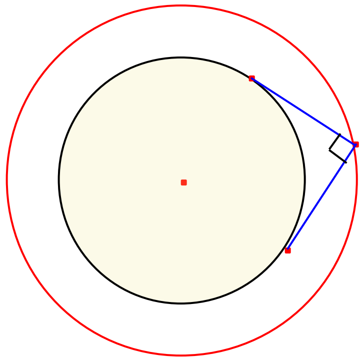
KN=h

[ENKA]=Φ /2·h

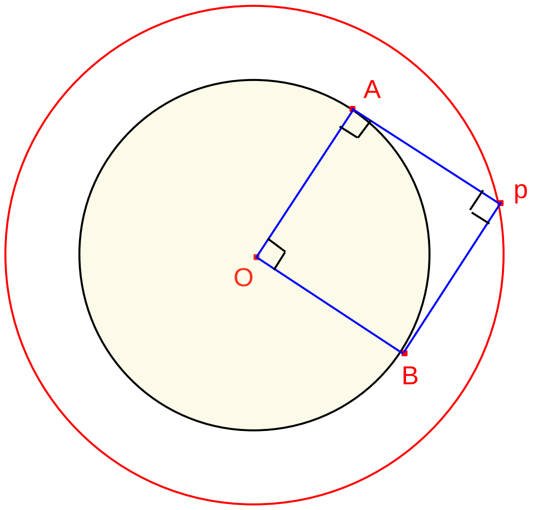
[KLMN=h/2

[blava/[groga]= Φ

5288.- La figura està formada per dues circumferències concèntriques i dues tangents Calculeu la proporció entre les àrees dels cercle groc i el cercle exterior.



Solució:



OA=OB=r

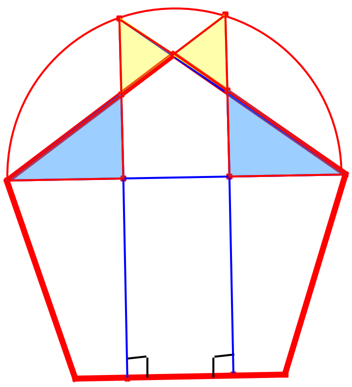
OP=R

OAPB és un quadrat

$R^2=2r^2$

[groga]/[total]=/1/2

5289.- La figura està formada per un pentàgon regular i una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga



Solució:

Siga $\overline{AB} = 1, \overline{CE} = \Phi$

$\overline{JQ} = \frac{1}{2}\Phi$

$\angle EJQ = 72°$

$\overline{JM} = \frac{1}{2}\Phi \cdot 4\cos 72° = \frac{1}{4}$

$\overline{LM} = \frac{1}{2}$

Siguen $\overline{MN} = a, \overline{NP} = b$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EMN}, \overset{\Delta}{QMC}$ són semblants.

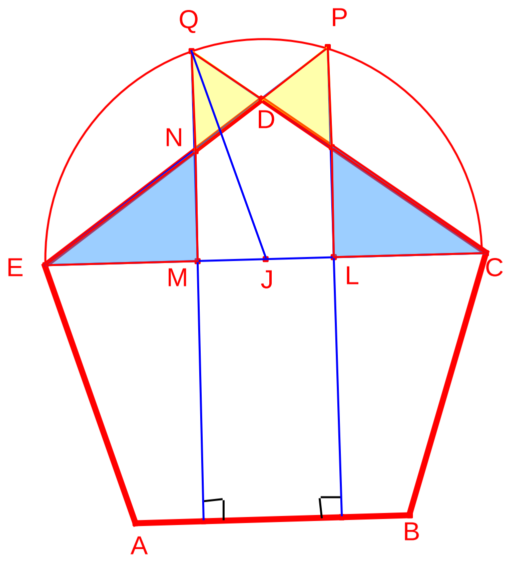
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{\frac{2\Phi+1}{4}}{\frac{2\Phi-1}{4}} = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}$$

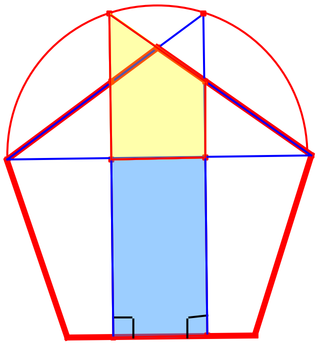
$$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

La proporció d'àrees és:

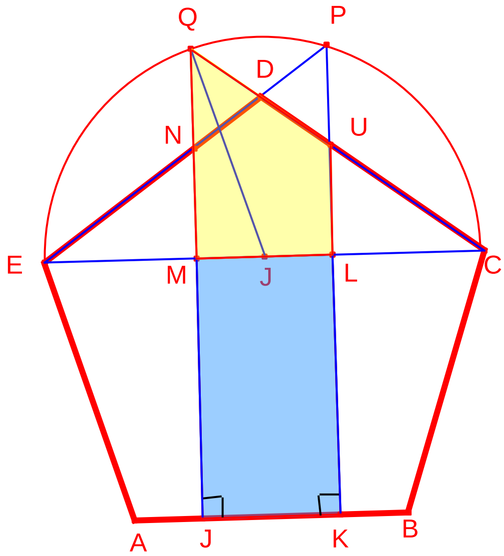
$$\frac{S_{blava}}{S_{groga}} = \frac{2 \cdot S_{EMN}}{2 \cdot S_{NDQ}} = \frac{\frac{2\Phi-1}{4} \cdot a}{\frac{1}{4} \cdot b} = (2\Phi - 1)\frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}$$



5290.- La figura està formada per un pentàgon regular i una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga



Solució:



Siga $\overline{AB} = 1, \overline{CE} = \Phi$

$\overline{JQ} = \frac{1}{2}\Phi$

$\angle EJQ = 72°$

$\overline{JM} = \frac{1}{2}\Phi \cdot 4\cos 72° = \frac{1}{4}$

$\overline{LM} = \frac{1}{2}$

Siguen $\overline{MN} = a, \overline{NP} = b$

$a + b = \frac{2\Phi + 1}{4} \cdot \tan 36°, a = \frac{2\Phi - 1}{4} \cdot \tan 36°$

Siga $\overline{JM} = c$

$c = \sin 72°$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{blava}}{S_{groga}} = \frac{S_{JKLM}}{S_{LMUQ}} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{2a+b}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin 72°}{\frac{1}{4}\Phi \cdot \tan 36°} = \frac{2}{\Phi} \cdot \frac{2 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36°}{\frac{\sin 36°}{\cos 36°}} = \frac{4}{\Phi} \cdot \cos^2 36° = \Phi$$