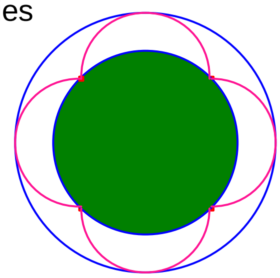
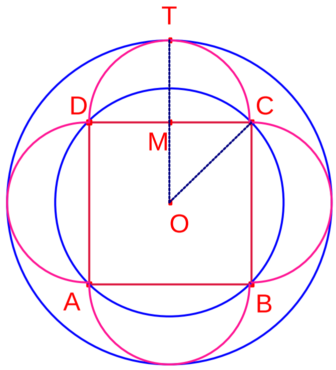
Problemes de Geometria per a l'ESO 53

521.- En la figura hi ha dues circumferències i 4 semicircumferències iguals tangents interiors a la circumferència gran.
Si l'àrea del cercle menut és 1 quin és l'àrea del cercle gran



Solució:
Els quatre semicircumferències tallen la circumferència menuda formant un quadrat inscrit a la circumferència.
Siga ABCD els vèrtexs del quadrat inscrit en la circumferència menuda.
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.
M és el centre del semicercle superior.
Siga T el punt de tangència del semicercle superior i la circumferència gran.



Vegem la proporció entre els radis de la circumferència menuda i la gran.
Siga $\overline{AC} = r$ radi de la circumferència menuda.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OMC}$:

$$\overline{OM} = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{MT} = \overline{MC} = \overline{OM} = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

El radi de la circumferència gran és:

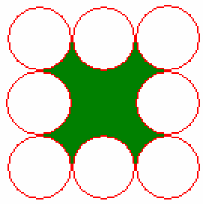
$$\overline{OT} = r\sqrt{2}.$$

Les àrees dels dos cercles són proporcionals als quadrats de la proporció dels radis:

$$\frac{S_{cercleG}}{S_{cercleM}} = \left(\frac{r\sqrt{2}}{r}\right)^2 = 2.$$

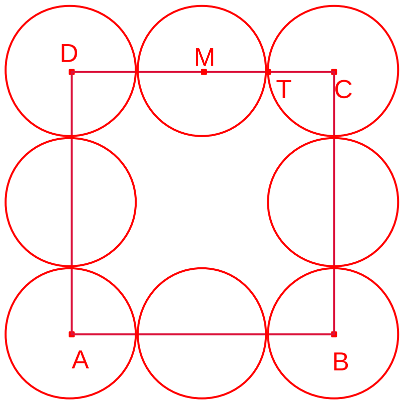
$$S_{cercleG} = 2 \cdot S_{cercleM} = 2.$$

522.- La regió ombrejada està afitada per 8 circumferències iguals i els centres són els punts migs dels costats d'un quadrat i els vèrtexs.
El radi de cada circumferència és 1cm.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

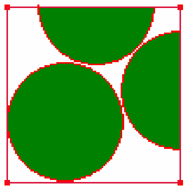


Solució:

Siga $r = \overline{CT}$ radi de la circumferència
Siga ABCD els vèrtexs del quadrat.
El costat del quadrat és igual a 4 radis de circumferència.
$\overline{AB} = 4r$.
L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea del quadrat menys l'àrea de 3 cercles de radi r.
$S = (4r)^2 - 3 \cdot \pi r^2 = (16 - 3\pi) r^2$.



523.- En el dibuix hi ha una circumferència i dos semicercles de radi 1 dins d'un quadrat.
Calculeu la mesura del costat del quadrat



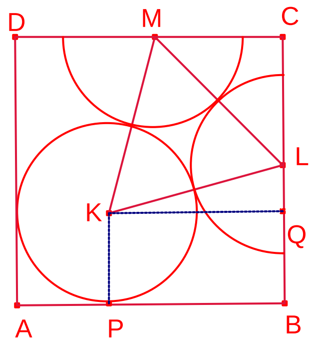
Solució:

Siguen ABCD el quadrat de costat $c=\overline{AB}$.
Siga r el radi de les dos semicircumferències i de la circumferència.
Els centres dels semicircumferència i de la circumferència per ser tangents i del mateix radi formen un triangle equilàter.

Siga $\overset{\Delta}{KLM}$ el triangle que formen els tres centres.

$\overline{KL}=\overline{ML}=2r$.

El triangle $\overset{\Delta}{CML}$ és rectangle i isòsceles.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CML}$:

$\overline{CL}=r\sqrt{2}$.

Siga P la projecció de K sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga Q la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{KP}=\overline{AP}=r$.

$\overline{PB}=c-r$.

$\overline{LQ}=\overline{AB}-\overline{QB}-\overline{CL}=c-r-r\sqrt{2}=c-\left(1+\sqrt{2}\right)r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KQL}$:

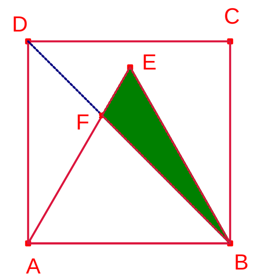
$(2r)^2=(c-r)^2+\left(c-\left(1+\sqrt{2}\right)r\right)^2$. Simplificant:

$c^2-\left(2+\sqrt{2}\right)rc+\sqrt{2}r^2=0$.

Resolent l'equació:

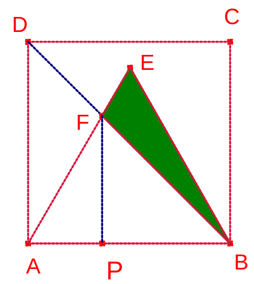
$$c=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}r.$$

524.- Donat el quadrat ABCD, sobre el costat $\overline{AB}$ i interior al triangle es dibuixa el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$. La diagonal BD talla $\overline{AE}$ en el punt F.



Calculeu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{BEF}$ i el quadrat ABCD.

Solució:

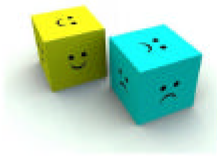


Siga $c = \overline{AB}$ costat del quadrat.
L'àrea del quadrat ABCD és:
$S_{ABCD} = c^2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:
$$S_{ABE} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$
Siga P la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga $h = \overline{FP}$, $x = \overline{AP}$
$\angle FAP = 60^o$.
$\overline{AF} = 2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APF}$:
$h = x\sqrt{3}$ (1)
$\angle FBP = 45^o$.
$\overline{BP} = \overline{FP} = h$.
$c - x = h$ (2)
Considerem el sistema format per les expressions 81) (2):
$\begin{cases} h = x\sqrt{3} \\ c - x = h \end{cases}$. Resolent el sistema:
$$h = \frac{3-\sqrt{3}}{2}c.$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és:
$$S_{ABF} = \frac{ch}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}c^2.$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BEF}$ és igual a l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$, menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$$S_{BEF} = S_{ABE} - S_{ABF} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 - \frac{3-\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}c^2.$$
La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{BEF}$ i el quadrat ABCD és:
$$\frac{S_{BEF}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}-3}{4}c^2}{c^2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}.$$

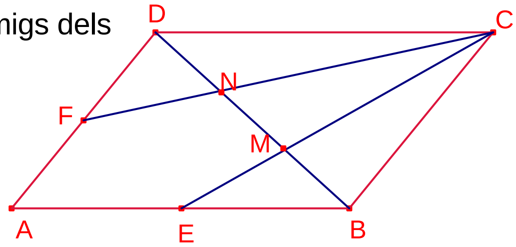
525.- La suma de les arestes de dos cubs és divisible per 72.
Proveu que la suma dels volums és divisible per 18.
KöMaL, C1111.



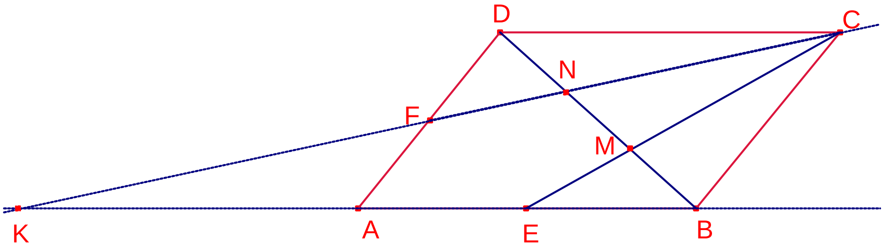
Solució:
Siguen dos cubs d'arestes $a, b \in N$.
El cub té 12 arestes. Aleshores:
$12a + 12b = 72k$, $k \in N$.
$a + b = 6k$.
La suma dels volums és:
$S = a^3 + b^3$.
$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

$(6k)^3 = S + 18abk$.
$S = 216k^3 - 18abk = 18(12k^3 - abk)$, $12k^3 - abk \in N$.
Aleshores, la suma dels volums és divisible per 18.

526.- En el paral·lelogram ABCD, siguen E i F els punts migs dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, respectivament.
Els segments $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ divideixen la diagonal $\overline{BD}$ en tres parts iguals.
Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 28, problema 37.



Solució:



El segment $\overline{CE}$, talla la diagonal $\overline{BD}$ en M.
El segment $\overline{CF}$ talla la diagonal $\overline{BD}$ en N.
Les rectes CF i AB és tallen en el punt K.

Els triangles $\overset{\Delta}{EBM}$, $\overset{\Delta}{CDM}$ són semblants i la raó de semblança és $\dfrac{\overline{EB}}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{2}$.

Aleshores, $\overline{DM}=2\cdot\overline{BM}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CDF}$, $\overset{\Delta}{KAF}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AK}=\overline{CD}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{KBN}$, $\overset{\Delta}{CDN}$ són semblants i la raó de semblança és $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{CD}}=2$.

Aleshores, $\overline{BN}=2\cdot\overline{DN}$.

$\overline{BD}=\overline{DN}+\overline{NM}+\overline{MB}=\overline{DN}+\overline{BN}=3\cdot\overline{DN}$. Aleshores:

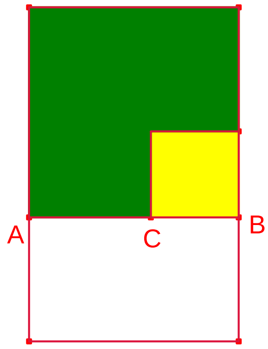
$\overline{DN}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}$.

$\overline{BD}=\overline{DN}+\overline{NM}+\overline{MB}=\overline{DM}+\overline{BM}=3\cdot\overline{BM}$. Aleshores:

$\overline{BM}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}$.

$\overline{MN}=\overline{BD}-\left(\overline{DN}+\overline{BM}\right)=\overline{BD}-\dfrac{2}{3}\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}$.

527.- Siga C un punt del segment $\overline{AB}$ tal que l'àrea del quadrat de costat $\overline{AC}$ és el doble de l'àrea del quadrat de costat $\overline{BC}$.
Proveu que la suma de les àrees dels quadrats de costat $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ és el doble de l'àrea del rectangle de costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.
Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 61, problema 72.



Solució:

$\overline{AC}^2 = 2 \cdot \overline{BC}^2$.

Siga $x = \overline{BC}$, aleshores, $\overline{AC} = x\sqrt{2}$.

$\overline{AB} = \left(1+\sqrt{2}\right)x$.

La suma d'àrea dels quadrats de costat $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ és:

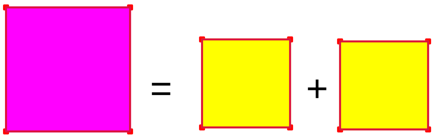
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \left(\left(1+\sqrt{2}\right)x\right)^2 + x^2 = \left(4+2\sqrt{2}\right)x^2$.

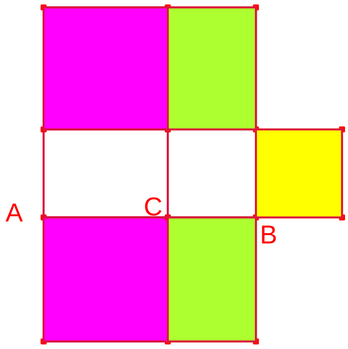
L'àrea del rectangle de costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ és:

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \left(1+\sqrt{2}\right)x \cdot x\sqrt{2} = \left(2+\sqrt{2}\right)x^2$.

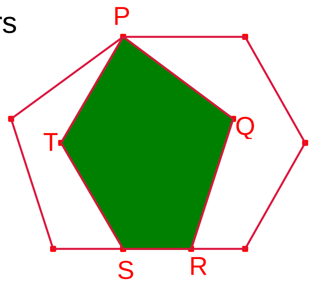
Aleshores, $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2 \cdot \left(\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right)$.

Solució 2:





528.- En la figura s'han superposat un pentàgon i un hexàgon regulars (veure figura).



a) Determineu l'angle $\angle TPQ$.

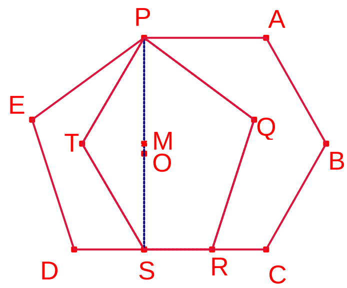
b) Si $\overline{PQ}=a$ calculeu l'àrea i el perímetre del pentàgon PQRST intersecció.

Solució:

Siga ABCSTP l'hexàgon regular.

Siga DEPQR el pentàgon regular

La diagonal $\overline{PS}$ de l'hexàgon regular és perpendicular al costat $\overline{CS}$, aleshores, $\overline{PS}$ és mediatriu del costat $\overline{DR}$ del pentàgon regular.



L'angle interior de l'hexàgon regular mesura 120º.

L'angle interior del pentàgon regular mesura 108º.

$\angle TPS=\frac{180^o-\angle PTS}{2}=30^o$. $\angle SPQ=\frac{\angle EPQ}{2}=54^o$.

Aleshores, $\angle TPQ=\angle TPS+\angle SPQ=84^o$.

Siga O el centre del pentàgon regular DEPQR de costat $\overline{PQ}=a$.

$\overline{PR}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$. $\angle ORS=54^o$.

L'àrea del pentàgon PQRST és igual a l'àrea del quadrilàter PQRS més l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PST}$.

L'àrea del quadrilàter PQRS és la meitat de l'àrea del pentàgon regular DEPQR.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ORS}$:

$\overline{OS}=\overline{RS}\cdot tg54^o=\frac{a}{2}tg54$.

L'àrea del quadrilàter PQRS és:

$$S_{PQRS}=\frac{1}{2}S_{DEPQR}=\frac{1}{2}\frac{5a\cdot\frac{a}{2}tg54^o}{2}=\frac{5}{8}a^2\cdot tg54^o.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PRS}$: $\overline{PS}=\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{PS}$. $\overline{PM}=\frac{a}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTM}$:

$\overline{TM}=\overline{PM}\cdot tg30^o=\frac{a\sqrt{3}}{12}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. $\overline{PT}=2\cdot\overline{TM}\cdot tg30^o=\frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PST}$ és:

$$S_{PST}=\frac{\overline{PS}\cdot\overline{TM}}{2}=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\frac{a\sqrt{3}}{12}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}=\frac{\left(5+2\sqrt{5}\right)\sqrt{3}}{48}a^2.$$

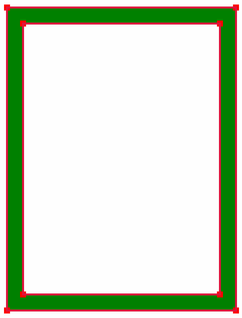
L'àrea del pentàgon PQRST és:

$$S_{PQRST}=S_{PQRS}+S_{PST}=\frac{5}{8}a^2tg54^o+\frac{\left(5+2\sqrt{5}\right)\sqrt{3}}{48}a^2\approx 1'202a^2.$$

El perímetre del pentàgon PQRST és:

$$P_{PQRST}=2\cdot\overline{PT}+\frac{5}{2}\overline{PQ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\frac{5}{2}\right)a\approx 4.277a.$$

529.- Una pàgina d'un llibre mesura $30\text{cm} \times 40\text{cm}$. La pàgina té un marge de 2cm per costat.
Quin percentatge de la pàgina ocupa el marge.
UKMT, 2007. Intermediate.

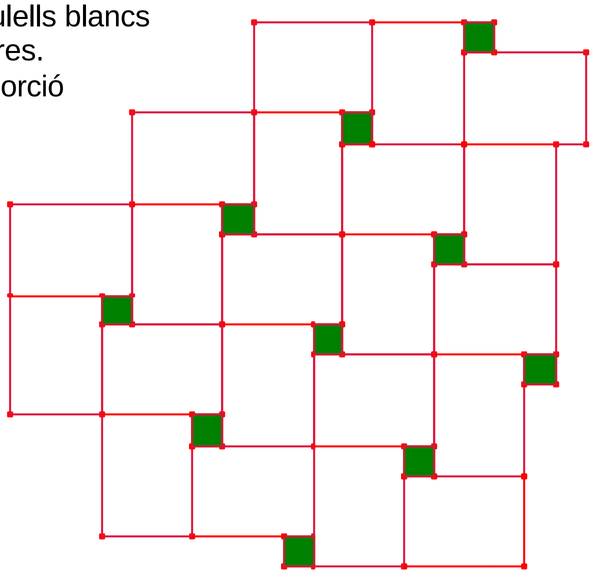


Solució:
Els costats del rectangle interior mesuren $26\text{cm} \times 36\text{cm}$.

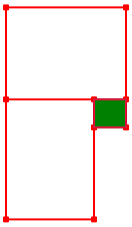
L'àrea de la pàgina és:
$S_p = 30 \cdot 40 = 1200$.
L'àrea que ocupa el marge és:
$S_m = 30 \cdot 40 - 26 \cdot 36 = 264$.

La proporció entre les àrees del marge i la pàgina és:
$\frac{S_m}{S_p} = \frac{264}{1200} = \frac{11}{50}$.
El percentatge és:
$\frac{S_m}{S_p} 100 = 22\%$.

530.- En la figura es mostra un mosaic fet amb taulells blancs rectangulars de $8\text{cm} \times 6\text{cm}$ i taulells quadrats negres.
Si el mosaic s'estén fins l'infinit determineu la proporció acolorida de verd.



Solució:
El costat del quadrat verd mesura 2cm.
Tesela mínima amb dos trasllats:



En el mosaic per cada quadrat hi ha 2 rectangles.
L'àrea de cada taulell quadrat és 2^2.
L'àrea de cada taulell rectangular blanc és $8 \cdot 6$
La proporció entre l'àrea acolorida i la blanca és:

$$\frac{2^2}{2^2 + 2(6 \cdot 8)} = \frac{1}{25}.$$