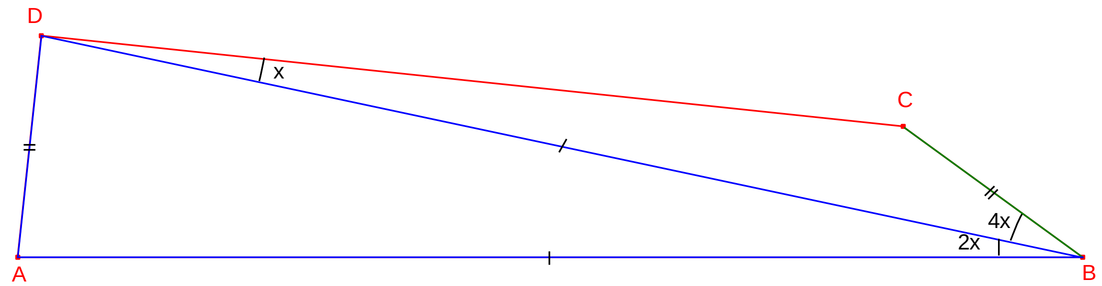
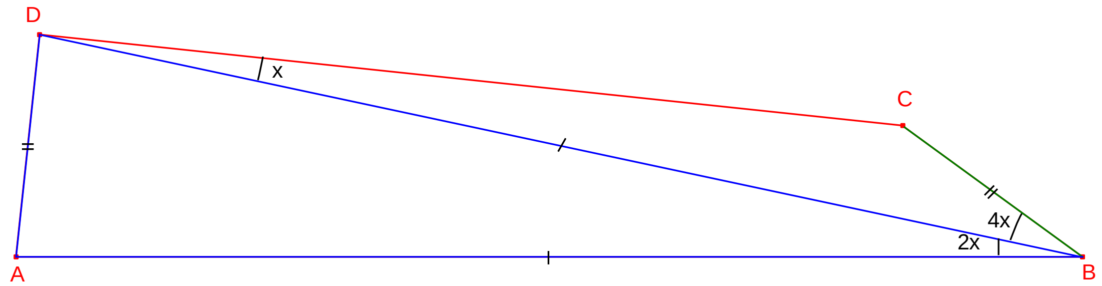
Problemes de Geometria per a l'ESO 531

5301.- En la figura, calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



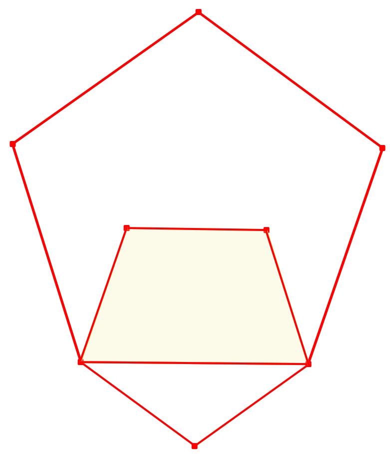
AB=BD=b, AD=BC=a
angleDAB=ADB=90º-x
angleBCD=180º-5x

a/sin(x) = b/sin(5x)
a/sin(2x) = b/cos(x)
sin(2x)/sin(x) = cos(x)/sin(5x)

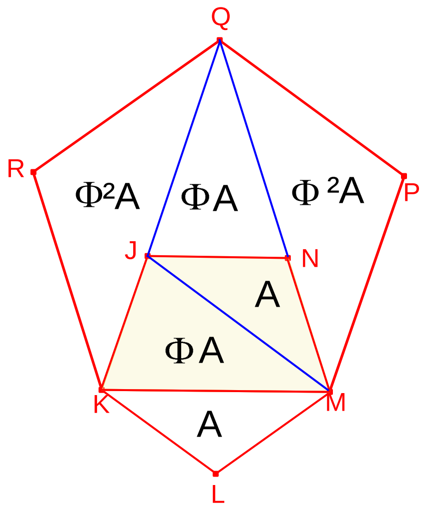
2=1/sin(5x)

5x=30º
x=6º

5302.- La figura està formada per dos pentàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea total.



Solució:

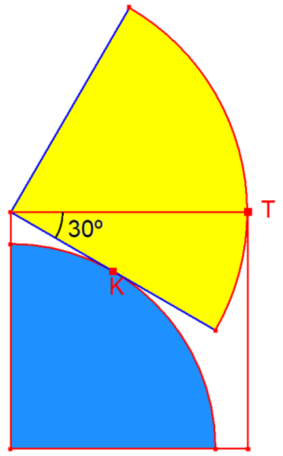


$[JKMN]=(1+\Phi)A$

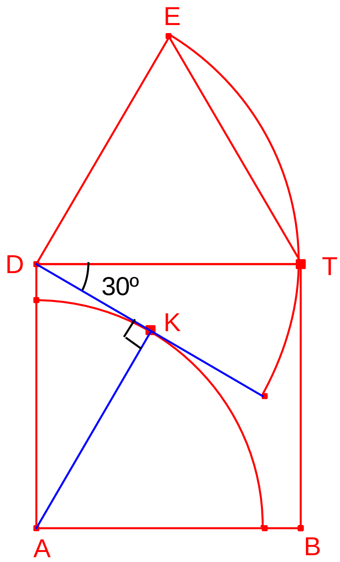
$[KLMPQR]=(2+2\Phi+2\Phi^2)A=4(1+\Phi)A$

$[KMNJ]/[KLMPQR]=1/4$

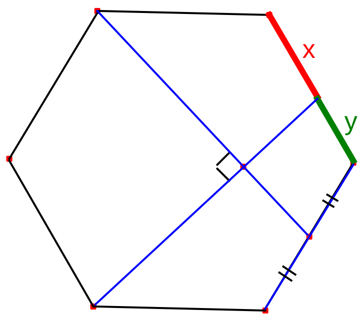
5303.- La figura està formada per un quadrat i dos quadrants.
K, T són punts de tangència.
Calculeu la proporció entre les àrees del quadrant blau i el quadrant groc.



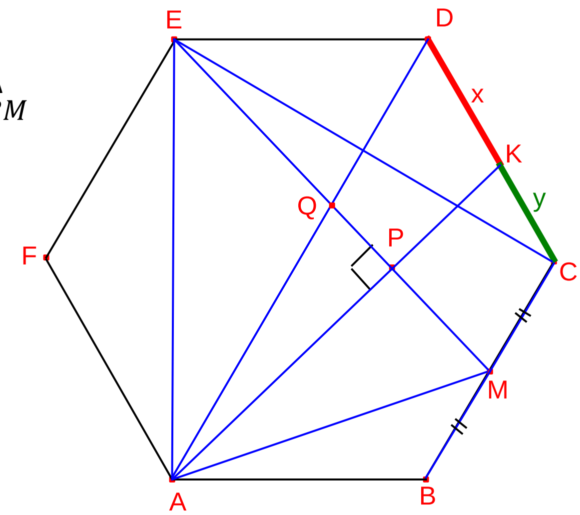
Solució:
Siga el quadrat $ABTD$ de costat $\overline{AB} = 1$
$\angle KAD = \angle KDC = 30°$
Siga $r = \overline{AK}$ radi del quadrant de centre A.
$r = \frac{\sqrt{3}}{4}$
La proporció entre les àrees dels dos quadrants és:
$\frac{S_{blava}}{S_{groga}} = \left(\frac{r}{1}\right)^2 = \frac{3}{4}$



5304.- La figura està formada per un hexàgon regular i dos segments interiors a l'hexàgon perpendiculars.
Calculeu la proporció $x : y$

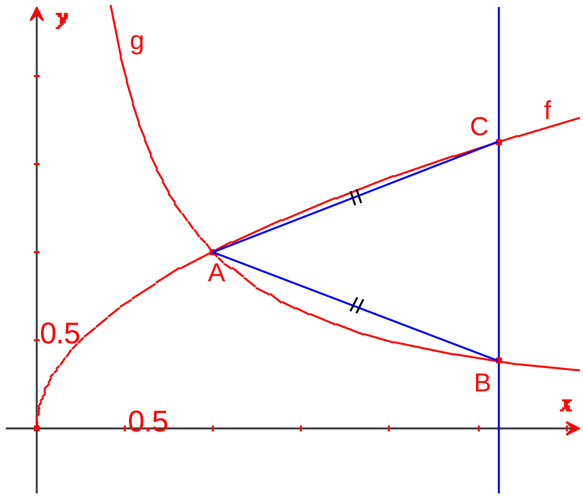


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
$\overline{AE} = \overline{CE} = \sqrt{3}$

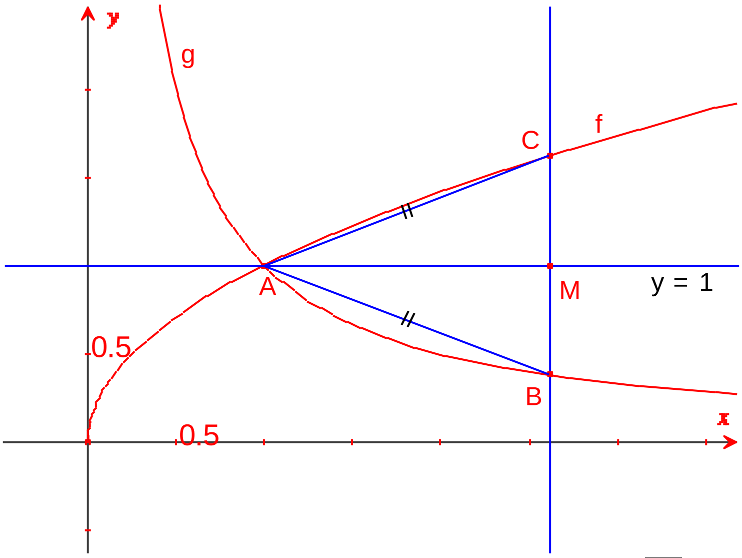


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ECM}$
$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$
$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$
Siga $\overline{AP} = h, \alpha = \angle MAE$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AME}$:
$$\frac{13}{4} = \frac{7}{4} + 3 - 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{3}{2\sqrt{21}}, \sin\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AME}$:
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}}$$
$$h = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$
$$\beta = \angle PAE$$
$$\cos\beta = \frac{5}{2\sqrt{13}}, \sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AKD}$:
$$\frac{x}{\sin(\beta - 30°)} = \frac{2}{\sin(150° - \beta}$$
$$\frac{x}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$x = \frac{4}{7}$$
$$y = 1 - x = \frac{3}{7}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

5305.- Siga les funcions $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{x}$
Siga $A(1,1)$ punt intersecció de les dues funcions.
Siga B de la gràfica $g(x)$ i C de la gràfica $f(x)$ tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$ i $\overline{BC}$ és paràlel a la recta $x = 0$
Determineu les coordenades del punt C



Solució:



La recta $y = 1$, és la recta mediatriu del segment $\overline{BC}$
Siga $B\left(a, \frac{1}{a}\right), C\left(a, \sqrt{a}\right), M(a, 1)$
$\overline{BM} = \overline{CM}$

$$1 - \frac{1}{a} = \sqrt{a} - 1$$

$$2 - \frac{1}{a} = \sqrt{a}$$

Elevant al quadrat:

$$4 + \frac{1}{a^2} - \frac{4}{a} = a$$

$$a^3 - 4a^2 + 4a - 1 = 0$$

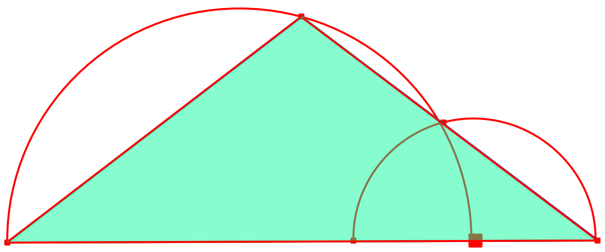
$$a = 1, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \Phi^2$$

Les coordenades del punt C són:

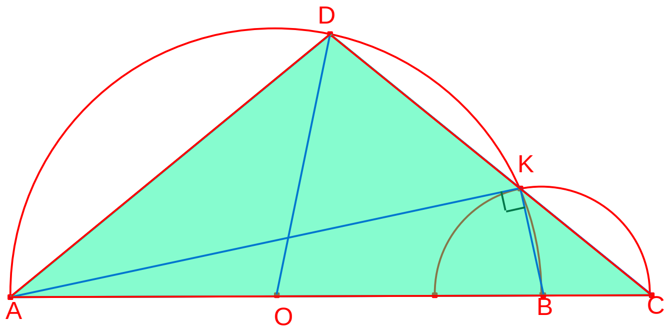
$$C\left(\Phi^2, \sqrt{\Phi^2}\right)$$

$$C(\Phi^2, \Phi)$$

5306.- La figura està formada per dos semicercles que contenen un triangle.
Està assenyalat el centre del semicercle de la dreta.
Proveu que el triangles és isòsceles.



Solució:



angleKAB=a

angleAOD=2b

angleKBC=90º+a

angleBCK=(90º-a)/2

angleACD=b-a

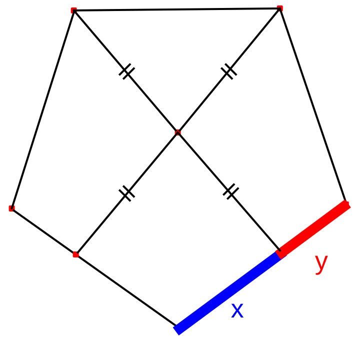
b-a=(90º-a)/2

b=90º+a)/2

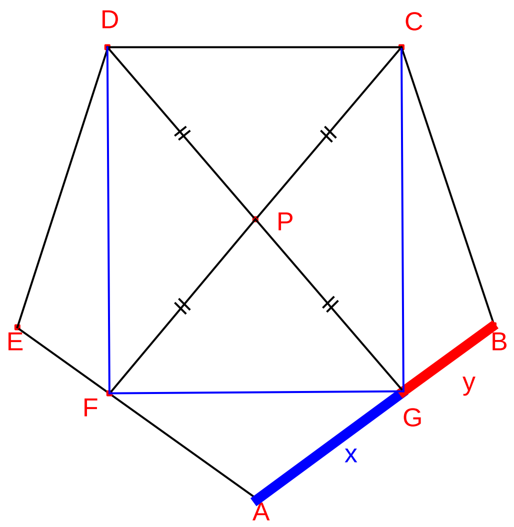
angleDAC=(180º-2b)=(90º-a)/2

AD=CD

5307.- La figura està formada per un pentàgon regular i dos segments que es tallen formant quatre segments iguals.
Calculeu la proporció $x : y$



Solució:

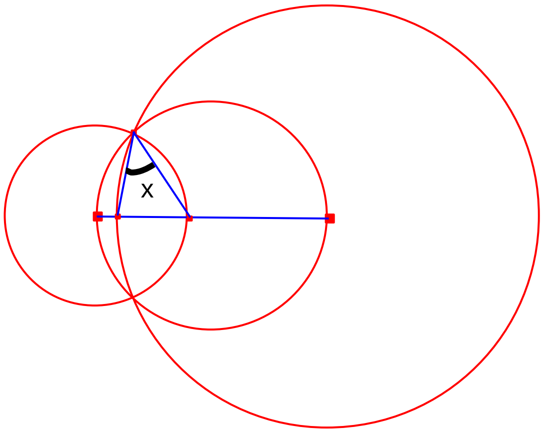


CDFG un rectangle
AB=1

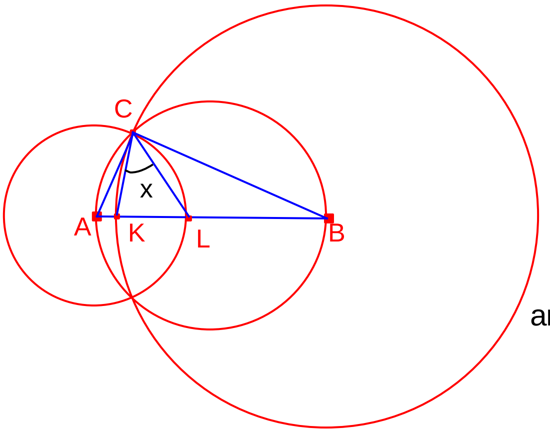
x=AG=1/ Φ
y=1-x=1/Φ^2

x/y= Φ

5308.- La figura està formada per dues circumferències secants i una tercera que passa pels seus centres i pels sues punts d'intersecció.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleCAB=a, angleCBA=b

a+b=90º

AC=AL, BC=BK

angleACL=90º-a/2

angleBCK=90º-b/2

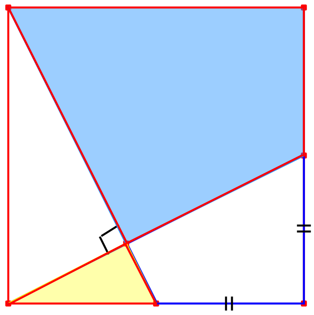
angleACB=anbleACL+angleBCK-x

a+b=90º=90º-a/2+90º-b/2-x

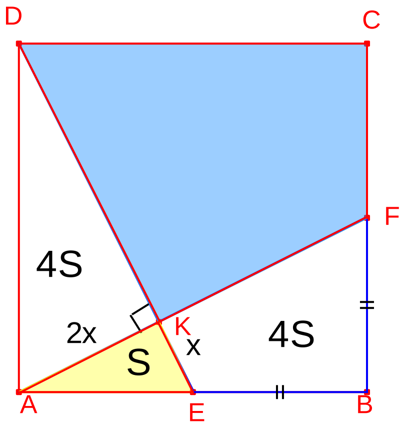
90-(a+b)/2=x

x=45º

5309.- La figura està formada per un quadrat i dos segments interiors perpendiculars.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:



DAE, ABF iguals

AE=BE=BF

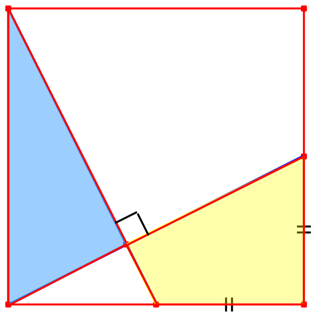
AKE, DAK semblants i de raó 1 : 2

[ABCD]=4·[DAE]=20S

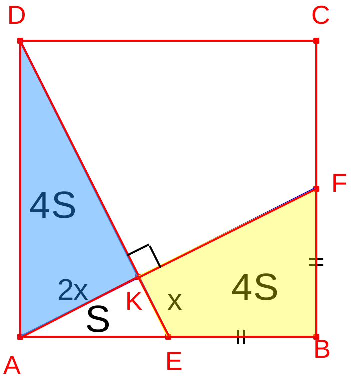
[KFCD]=11S

[KFCD] / [AKE] = 8

5310.- La figura està formada per un quadrat i dos segments interiors perpendiculars. Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:



DAE, ABF iguals
AE=BE=BF

[AKD] = [KEBF]