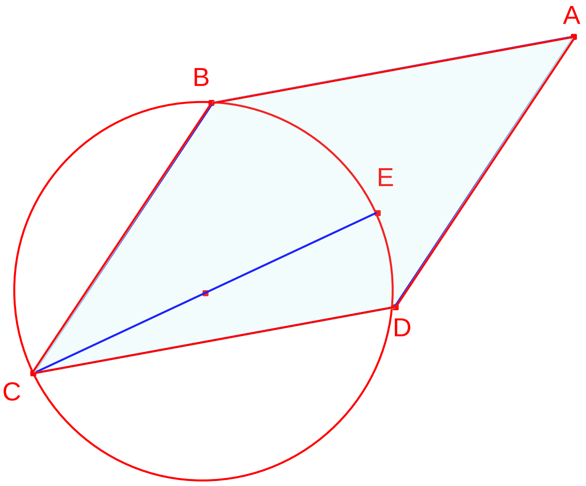
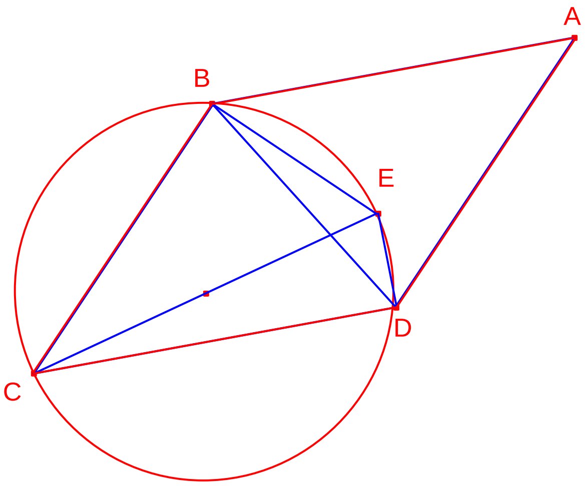
5311.- La figura està formada per un paral·lelogram $ABCD$ una circumferència i un diàmetre $\overline{CE}$
Demostreu que el punt E és l’ortocentre del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$



Solució:



angleABE=90º

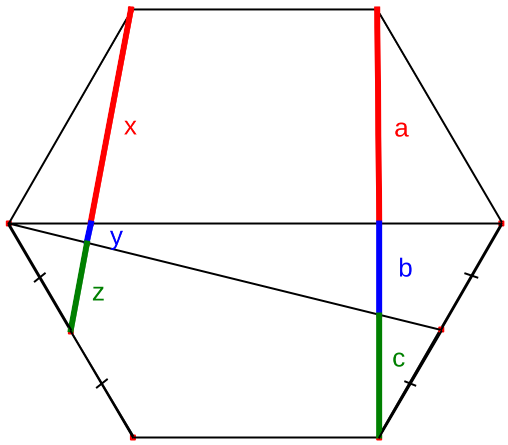
BE, AD perpendiculars

angleCDE=90º

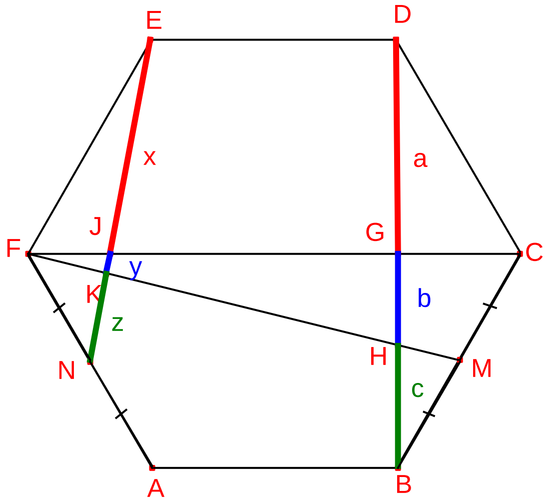
DE, AB perpendiculars

E ortocentre ABD

5312.- La figura està formada per un hexàgon regular, dues diagonals i dos segments.
Calculeu les proporcions $a : b : c$, $x : y : z$



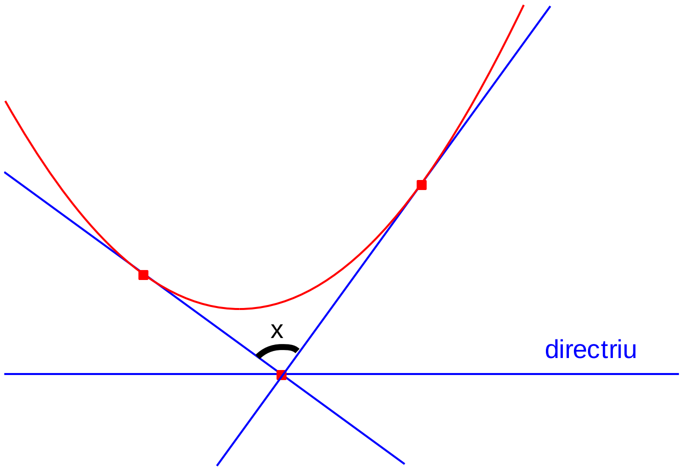
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$
$\overline{CG} = 1, a = \overline{DG} = \sqrt{3}, \overline{FG} = 3, \overline{BG} = 2\sqrt{3}$
Siga $\alpha = \angle CFM$



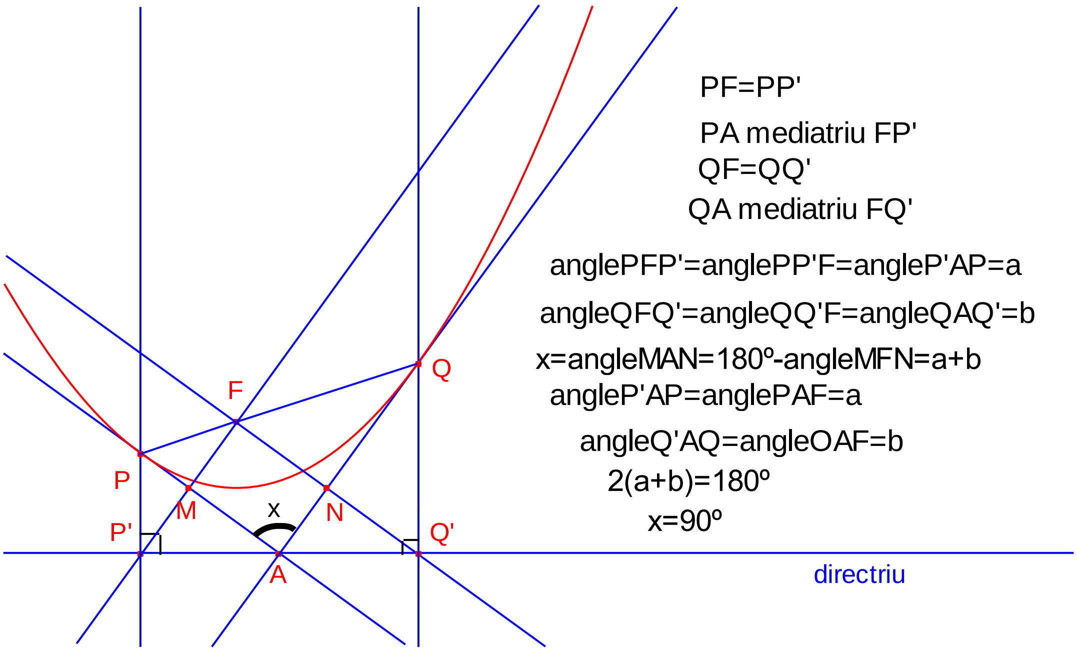
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{FMC}$:
$\overline{FM}^2 = 13, \cos\alpha = \dfrac{7}{2\sqrt{13}}, \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}, \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FGH}$:
$b = 3 \cdot \tan\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{7}$
$c = \sqrt{3} - b = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$
$a : b : c = \sqrt{3} : \dfrac{3\sqrt{3}}{7} : \dfrac{4\sqrt{3}}{7} = 7 : 3 : 4$

Siguen $\overline{FJ} = m, \beta = \angle FEN$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{NEF}$: $\overline{EN} = \sqrt{7}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{NEF}$:
$\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sin\beta}, \sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \cos\beta = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{FJE}$:
$\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sin(60° + \beta)} = \dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}}$
$x = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{FJE}$, $m^2 = \frac{4}{9}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{FJK}$:
$\dfrac{y}{\sin\alpha} = \dfrac{m}{\sin(60° + \alpha + \beta)}$
$y = \dfrac{2\sqrt{7}}{33}$
$z = \sqrt{7} - (x + y) = \dfrac{9\sqrt{7}}{33}$
$x : y : z = \dfrac{2\sqrt{7}}{3} : \dfrac{2\sqrt{7}}{33} : \dfrac{9\sqrt{7}}{33} = 22 : 2 : 9$

5313.- La figura està formada per una paràbola i la seua directriu.
Dues rectes tangents a la paràbola s'intersecten en la bisectriu.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



PF=PP'

PA mediatriu FP'

QF=QQ'

QA mediatriu FQ'

anglePFP'=anglePP'F=angleP'AP=a

angleQFQ'=angleQQ'F=angleQAQ'=b

x=angleMAN=180º-angleMFN=a+b

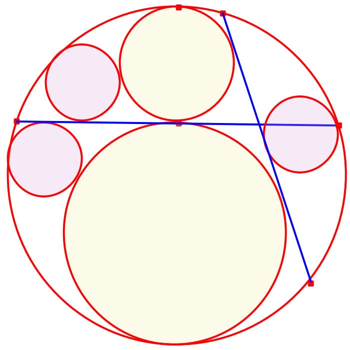
angleP'AP=anglePAF=a

angleQ'AQ=angleOAF=b

2(a+b)=180º

x=90º

5314.- La figura està formada per sis circumferències. Proveu que les tres circumferències morades són iguals.



Solució:

Siguen $\overline{PF}=\overline{PH}=r, \overline{QG}=\overline{QH}=R$

Aleshores, $\overline{OF}=R+r$

$\overline{KJ}=s, \overline{JH}=\overline{KK'}=a$

$\overline{OK}=R+r-s, \overline{PK}=r+s, PK'=r-s, \overline{OK'}=R-r+s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KK'P}$:

$(r+s)^2=(r-s)^2+a^2$

$4rs=a^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KK'O}$:

$(R+r-s)^2=(R-r+s)^2+a^2$

$s=\dfrac{Rr}{R+r}$

Anàlogament,

$\overline{LU}=s=\dfrac{Rr}{R+r}$

Siga $\overline{EF}=b$

Els triangles $\overset{\Delta}{QT'E}, \overset{\Delta}{PWE}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{r}{b+r}=\dfrac{R}{b+R+2r}=\dfrac{R-r}{R+r}$

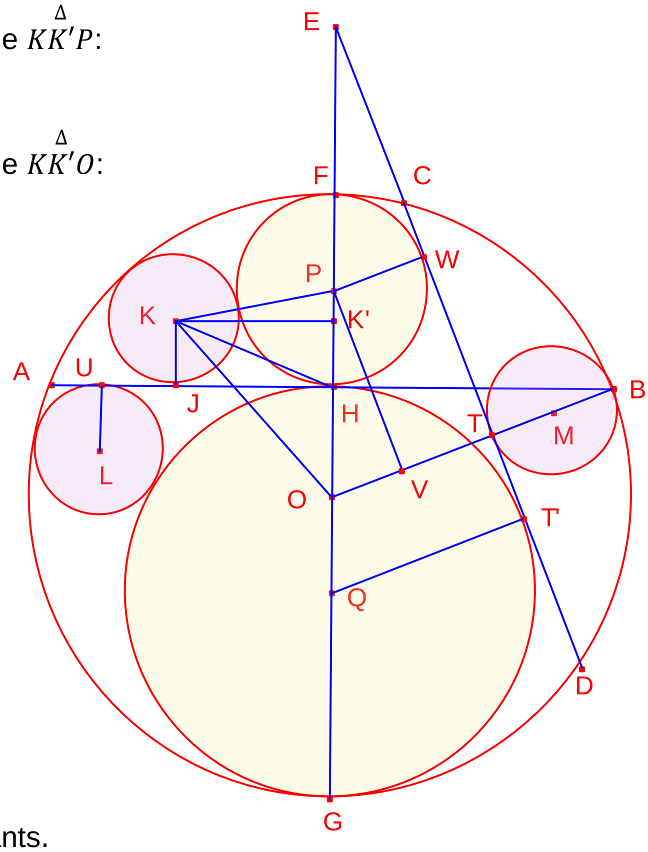
$\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OB}}=\dfrac{R-r}{R+r}$

$\overset{\Delta}{OTE}, \overset{\Delta}{OHB}$ són semblants.

Els punts O, T, M, B estan alineats.

Siga $\overline{MB}=\overline{MT}=t$

$\overline{OT}=R+r-2t, \overline{OV}=R-r$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OVP}, \overset{\Delta}{OTE}, \overset{\Delta}{PWE}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

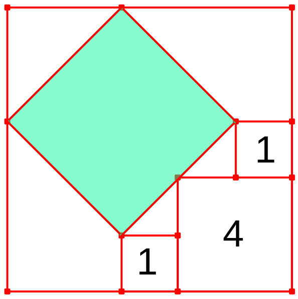
$\dfrac{R-r}{R+r}=\dfrac{R+r-2t}{R+r+b}=\dfrac{r}{r+b}$

$\dfrac{R-r}{R+r}=\dfrac{R-2t}{R}$

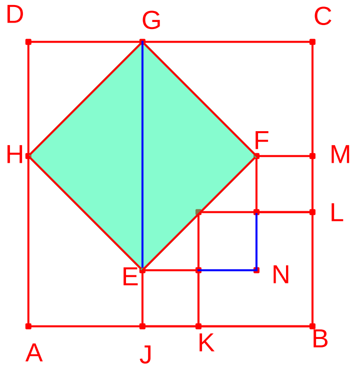
$t=\dfrac{Rr}{R+r}$

Les tres circumferències morades són iguals.

5315.- La figura està formada per cinc quadrats tres d’ells d’àrees 1, 4, 1
Calculeu la proporció entre l’àrea del quadrat ombrejat i l’àrea del quadrat exterior.



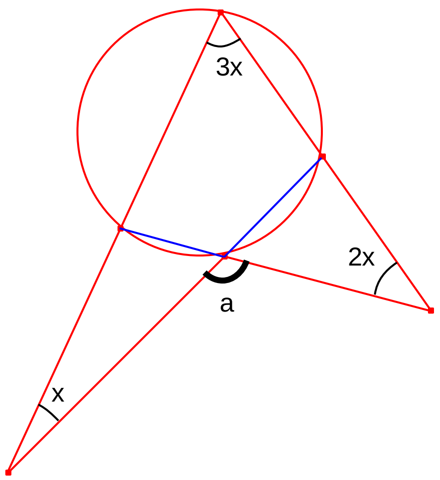
Solució:



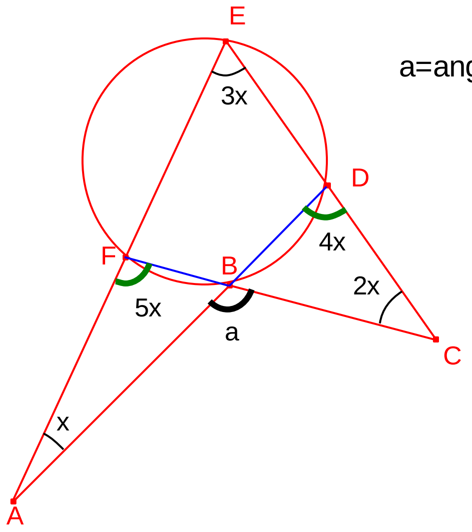
JK=JE=LM=1
KB=BL=2
EN=FN=2

$EF^2=8$
[EFGH]=8
GE=EF·sqrt(2)=4
AB=JE+EG=5
[ABCD]=25
[EFGH]/[ABCD]=8/25

5316.- En la figura calculeu la mesura de l'angle a



Solució:

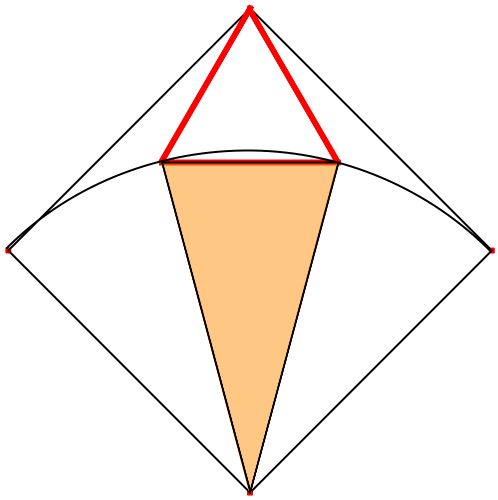


a=angleFBD=180º-3x=6x

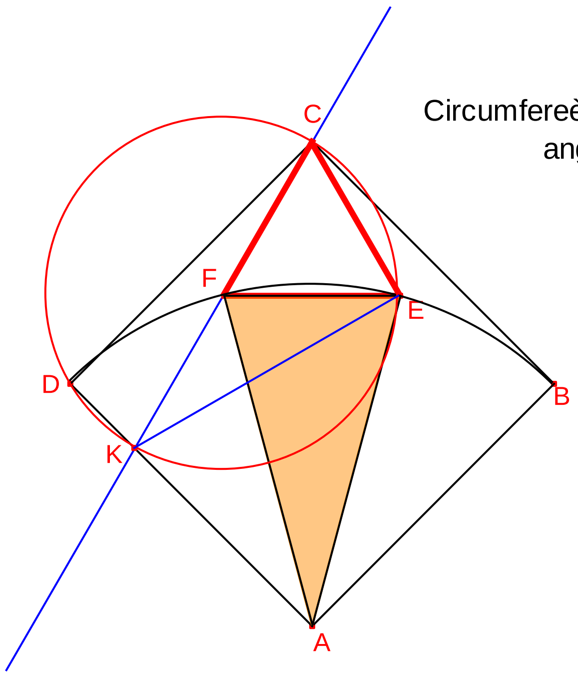
x=20º

a=120º

5317.- La figura està formada per un quadrat que conté un triangle equilàter i un quadrant.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle taronja i l'àrea del quadrat.



Solució:



Circumfereència centre F passa per C, E, K

angleKCE0angleKDC=90º

DKEC cíclic

angleCKE=30º

DF=FE=BE

angleFAE=30º

[AEF]=(1/4)[ABCD]

Solució 2

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{FEC}$ de costat $\overline{EF} = a$

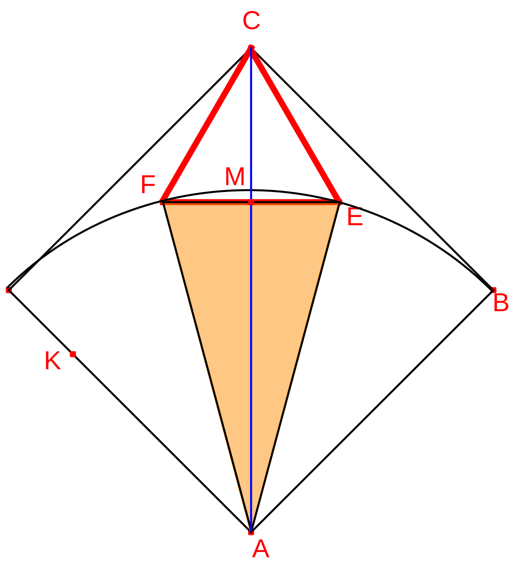
$$\overline{AC} = \sqrt{2}, \overline{AM} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}, \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

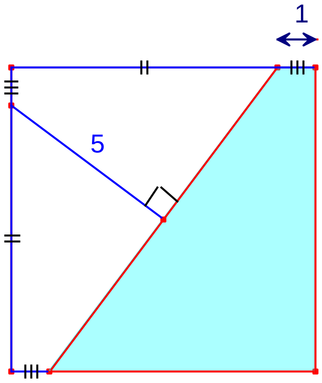
$$a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2}a\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{8}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{4}$$

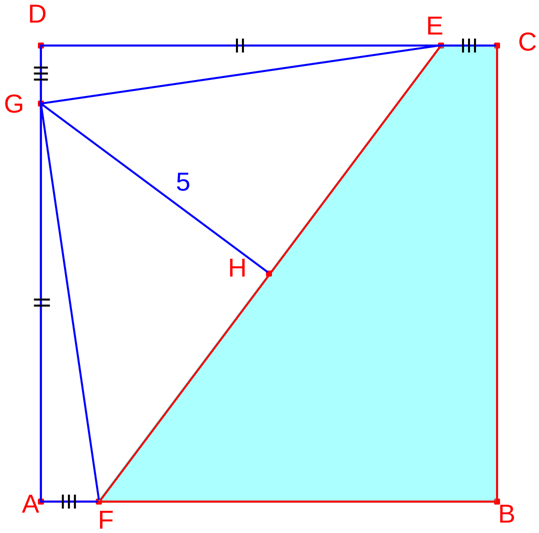
$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$$



5318.- La figura està formada per un quadrat i dos segments perpendiculars.
Calculeu l'àrea de trapezi blau.



Solució:



Els triangles EDG, GAF són iguals

GE=GF

angleFGE=90º

AG=DE=BF=a

GF=GE=sqrt(1+a²)

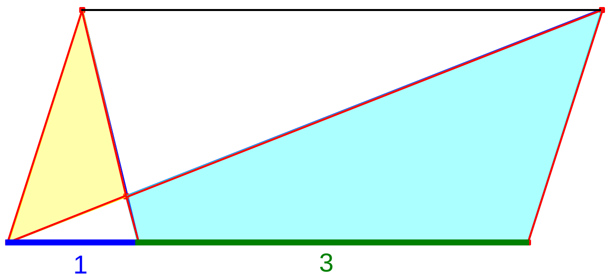
teorema Pitàgores FHG

1+a²=25+25

a=7

[FBCE]=(7+1)/2·8=32

5319.- La figura està formada per un paral·lelogram, una diagonal i un segment. Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:

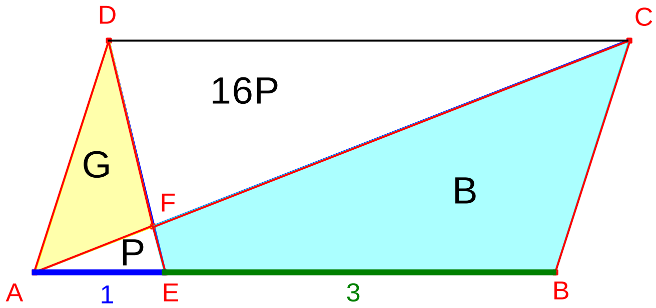
$$\frac{G+P}{1}=\frac{B+P}{4}$$

$$P+16P=B+P$$

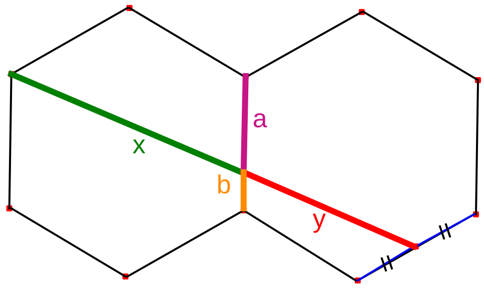
$$P=\frac{1}{16}B$$

$$\frac{G+\frac{1}{16}B}{1}=\frac{B+\frac{1}{16}B}{4}$$

$$\frac{B}{G}=\frac{64}{13}$$



5320.- La figura està formada per dos hexàgons regulars que comparteixen un costat i un segment. Calculeu les proporcions $x : y, a : b$



Solució:

Siguen els hexàgons regulars $ABCDEF, BGHIJC$ de costat $\overline{BC} = 2$

$\overline{EG} = 6, \overline{GM} = 1$

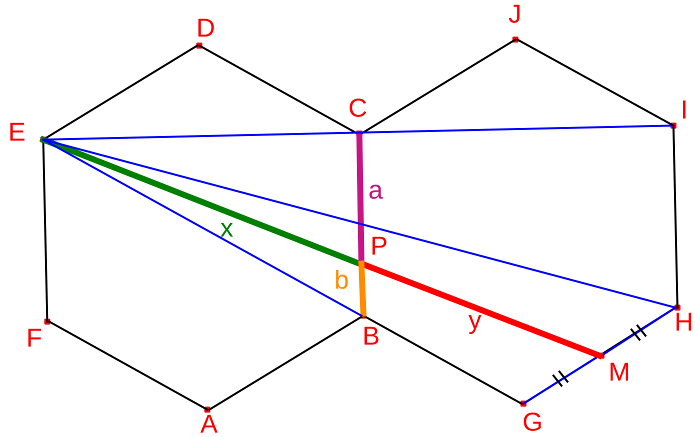
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EGM}$

$(x + y)^2 = 1 + 36 + 6$

$x + y = \sqrt{43}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EBP}$

$x^2 = 16 + b^2 - 4b$



Siga $\alpha = \angle MEG$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{EGM}$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{43}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{43}}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{EBP}$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{43}}}$$

$x = b\sqrt{43}$

$43b^2 = 16 + b^2 - 4b$

$$b = \frac{4}{7}$$

$$a = 2 - b = \frac{10}{7}$$

$a : b = 5 : 2$

$$x = \frac{4}{7}\sqrt{43}$$

$$y = \sqrt{43} - \frac{4}{7}\sqrt{43} = \frac{3}{7}\sqrt{43}$$

$x : y = 4 : 3$