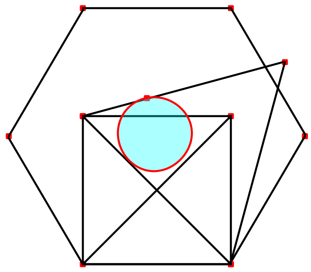
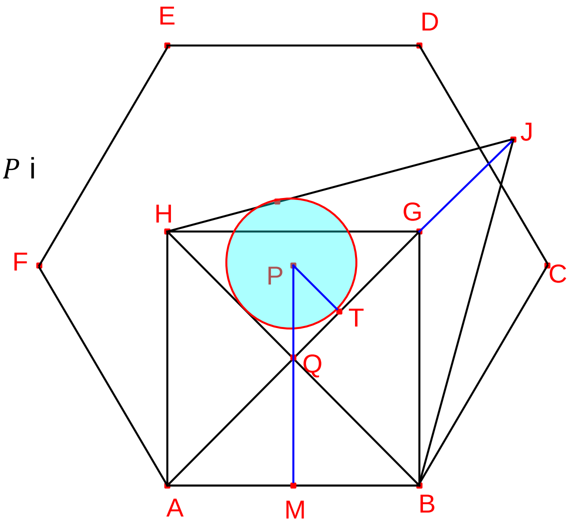
5321.- La figura està formada per un hexàgon regular, un quadrat amb les seues diagonals, un triangle equilàter i una circumferència.
Demostreu que l'hexàgon i la circumferència són concèntrics.

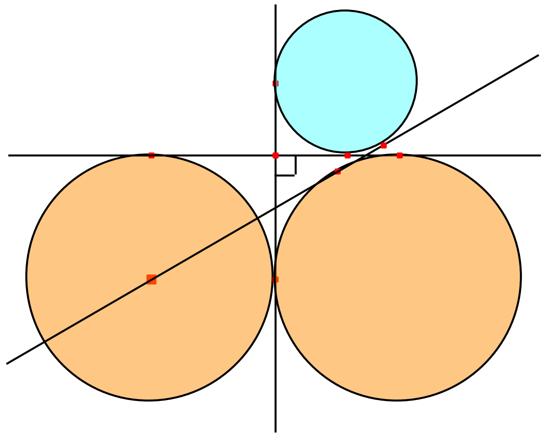


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$
La distància del centre de l'hexàgon regular és:
$\frac{1}{2}\overline{BD} = \sqrt{3}$

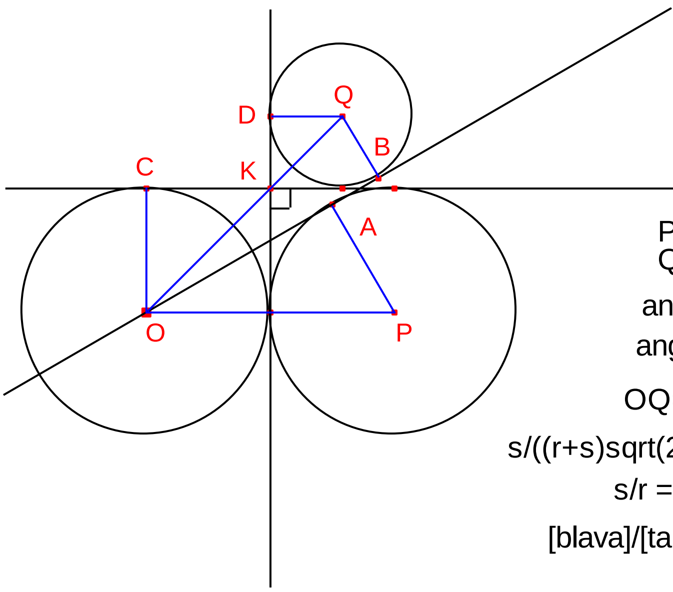


Siga la circumferència tangent a les diagonals del quadrat i a un costat del triangle equilàter de centre P i radi $\overline{PT} = r$
Els punts A, Q, J estan alineats.
La circumferència està inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HQJ}$.
$\overline{BH} = 2\sqrt{2}$
$\overline{QJ} = \sqrt{6}$
$r = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{QTO}$ és isòsceles:
$\overline{PQ} = r\sqrt{2} = \sqrt{3}-1, \overline{QM} = 1$
$\overline{PM} = \sqrt{3}$
Aleshores, el centre P i el centre de l'hexàgon regular $ABCDEF$ són iguals.

5322.- En la figura està formada per dues circumferències taronja són iguals i una circumferència blava més menuda.
Es mostren tres tangents comunes, una de les qual passa pel centre d'una circumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea taronja.



Solució:



PA=r, OP=2r
QB=QD=s

angleAOP=30º

angleKAP=45º

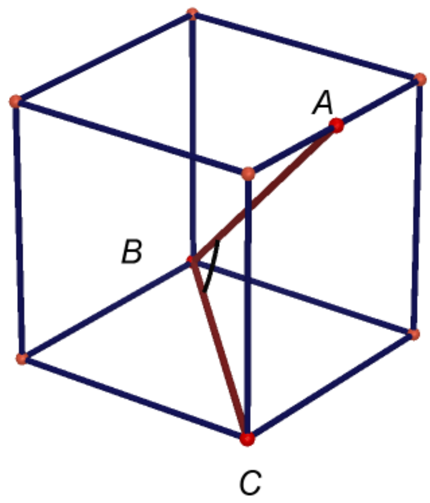
OQ=(r+s)sqrt(2)

s/((r+s)sqrt(2)) = tan 15º =2-sqrt(3)

s/r = sqrt(3)/3

[blava]/[taronja]=s²/(2r²)=1/6

5323.- En el cub de la figura, el punt A és el punt mig de l'aresta.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle ABC$



Solució:
Siga el cub d'aresta $\overline{PR} = 1$

$\overline{AR} = \overline{AQ} = \frac{1}{2}$

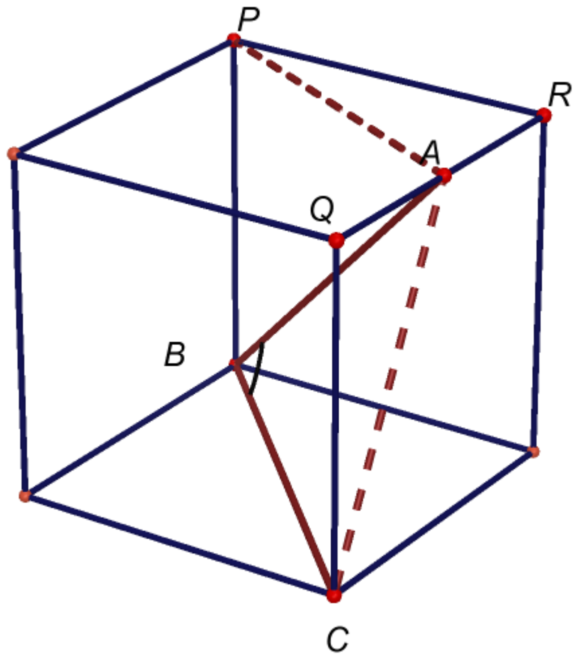
$\overline{BC} = \sqrt{2}$

$\overline{PA} = \overline{CA} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPA}$:

$\overline{BA}^2 = 1 + \frac{5}{4}$

$\overline{BA} = \frac{3}{2}$



Siga $\angle ABC = \alpha$

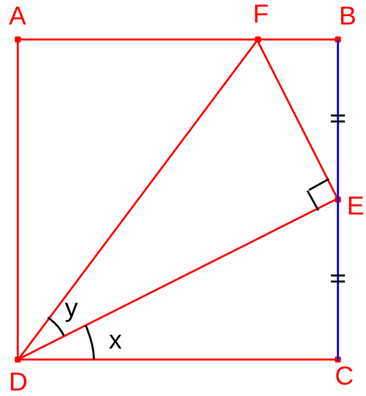
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\frac{5}{4} = 2 + \frac{9}{4} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45°$

5324.- En la figura $ABCD$ és un quadrat, E és el punt mig del costat $\overline{BC}$, Els segments $\overline{DE}, \overline{EF}$ són perpendiculars.
Proveu que $x = y$

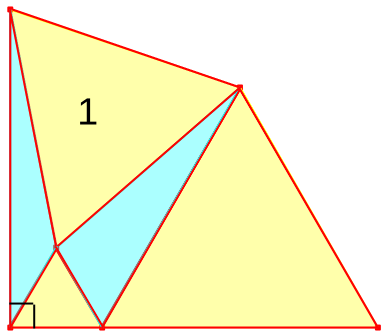


Solució:
$\overline{CD} : \overline{CE} = 2 : 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCE}, \overset{\Delta}{EBF}$ són semblants i de raó $2 : 1$
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{DE} = 2 \cdot \overline{EF}$

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCE}, \overset{\Delta}{DEF}$ són semblants.
Aleshores, $x = y$

5325.- Els triangles grocs són equilàters. Un d'ells té àrea 1.
Calculeu l'àrea total de la figura.

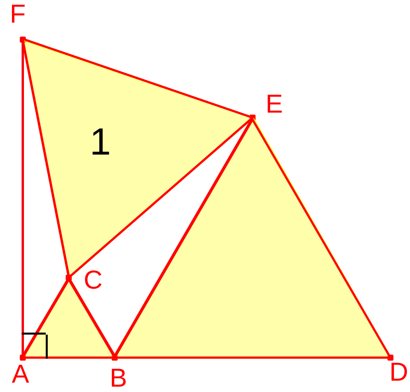


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BDE}$ de costat $\overline{BD} = b$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CEF}$ de costat $\overline{DE} = c$ i àrea 1.



$$\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 1$$

Siga $\overline{AF} = d$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab$$

Siga $\alpha = \angle BCE$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \sin\alpha = \frac{b\sqrt{3}}{2c}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACF}$:

$$\frac{d}{\sin(240° - \alpha)} = \frac{c}{\frac{1}{2}}$$

$$d = 2c\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2c}\right) = \frac{-a^2 - c^2 + b^2}{2a}\sqrt{3} =$$

$$= \frac{-a^2 - a^2 - b^2 + ab + b^2}{2a}\sqrt{3} = (b - a)\sqrt{3}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACF}$:

$$c^2 = d^2 + a^2 - ad\sqrt{3}$$

$$c^2 = 7a^2 + 3b^2 - 9ab$$

$$7a^2 + 3b^2 - 9ab = a^2 + b^2 - ab$$

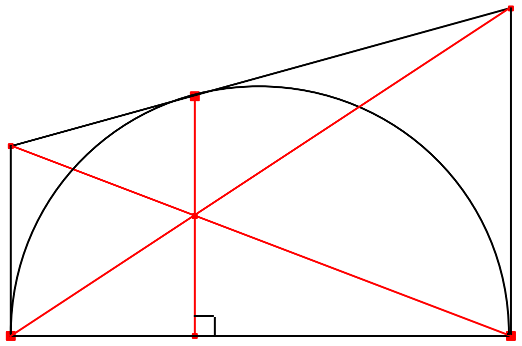
$$\frac{b}{a} = 3$$

$$c^2 = 7a^2$$

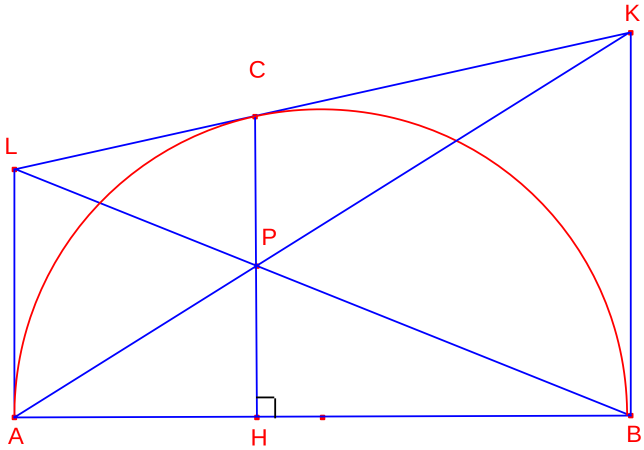
L'àrea total és:

$$S_{ADEF} = S_{ABC} + S_{BDE} + S_{CEF} + S_{ACF} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}2a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}15a^2 = \frac{22}{7}$$

5326.- La figura està formada per una semicircumferència i tres tangents.
Es mostren els tres punts de tangència.
Proveu que els tres segments vermells són concurrents.



Solució:



AL=CL=a, BK=CK=b

P intersecció AK, CH

LPC, LBK semblants

CP= ab/(a+b)

AHP, ABK semblants

PH=(AH/AB)b=a/(a+b)·b=ab/(a+b)

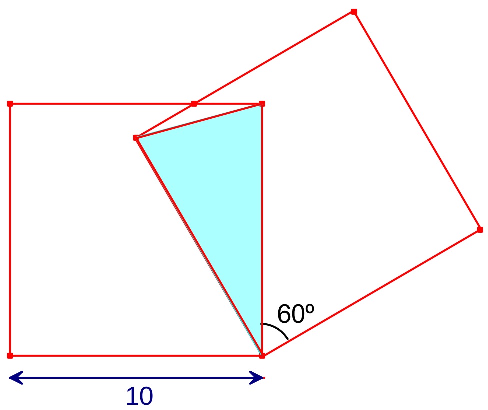
PH/BH = ab/(a+b)/BH

PH/AL = b/(a+b)

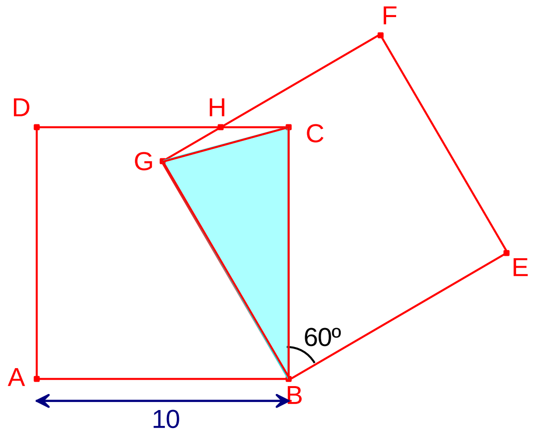
BH/AB=b/a+b)

P pertany a BL

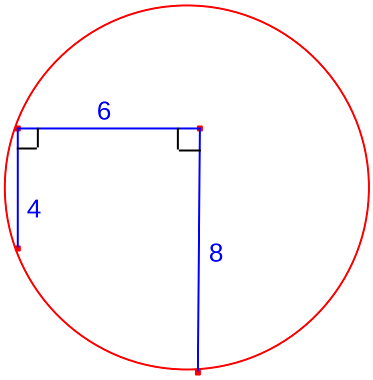
5327.- La figura està formada per dos quadrats iguals de costat 10.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



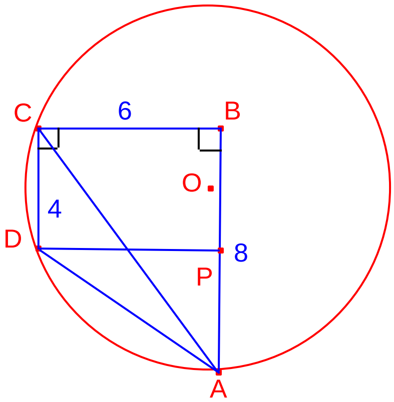
Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, BEFG$ de costats $\overline{AB} = \overline{BE} = 10$
$\angle GBC = 30°$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCG}$ és:
$S_{BCG} = \frac{1}{4} \cdot 10^2 = 25$



5328.- Calculeu el radi de la circumferència de la figura.



Solució:



OA=r

AC=10

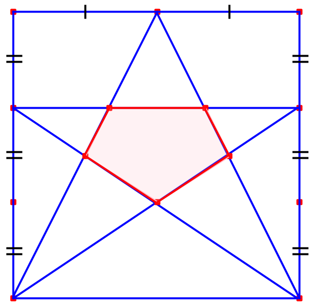
AP=4

AD=2·sqrt(13

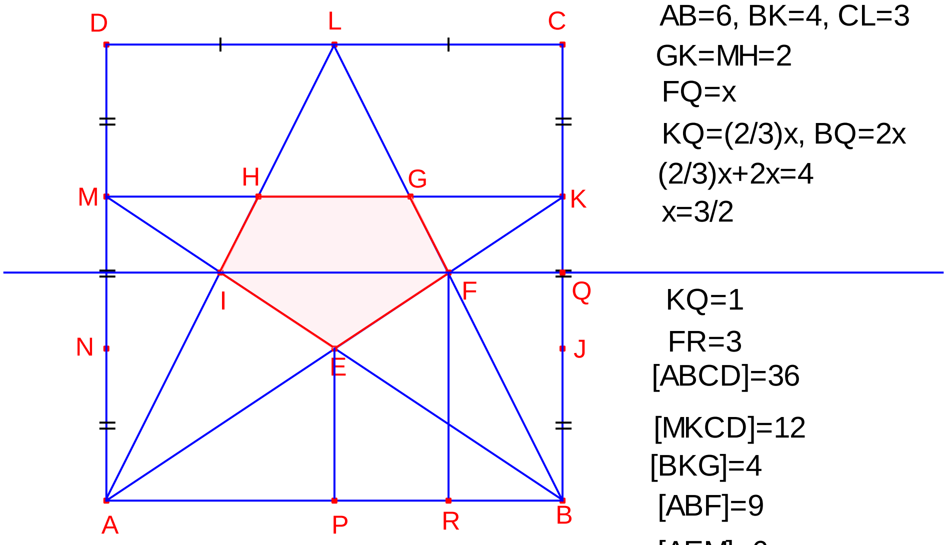
[ACD] = (1/2)4·6 = 10·4·2sqrt(13)/(4r)

r=5·sqrt(13)

5329.- La figura està formada per un quadrat.
Els costats verticals s'han dividit, cadascun, en tres parts iguals. El costat superior s'ha dividit en dues parts iguals.
Calculeu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=6, BK=4, CL=3

GK=MH=2

FQ=x

KQ=(2/3)x, BQ=2x

(2/3)x+2x=4

x=3/2

KQ=1

FR=3

[ABCD]=36

[MKCD]=12

[BKG]=4

[ABF]=9

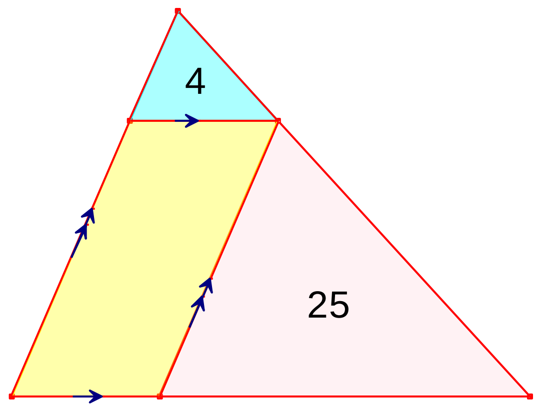
[AEM]=6

[MHI]=1

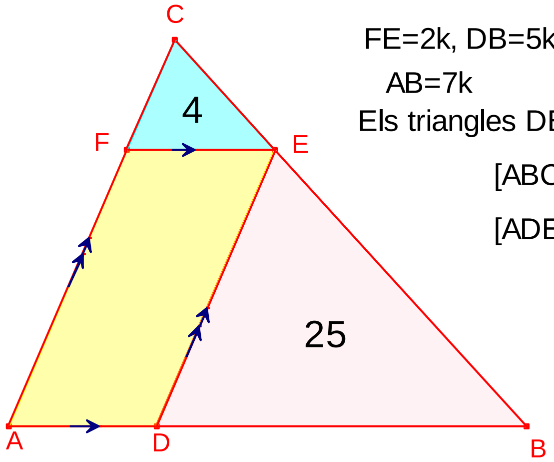
[EFGHI]=[ABCD]-([MKCD]+[BKG]+[ABF]+[AEM]+[MHI])=4

[EFGHI]/[ABCD]=4/36=1/9

5330.- En la figura, un triangle s'ha dividit en un paral·lelogram i dos triangles d'àrees 4 i 25. Calculeu l'àrea del paral·lelogram.



Solució:



Els triangles DBE, FEC són semblants

FE=2k, DB=5k

AB=7k

Els triangles DBE, ABC són semblants

$[ABC]=(7/2)^2\cdot[FEC]=49$

$[ADEF]=49-(4+25)=20$