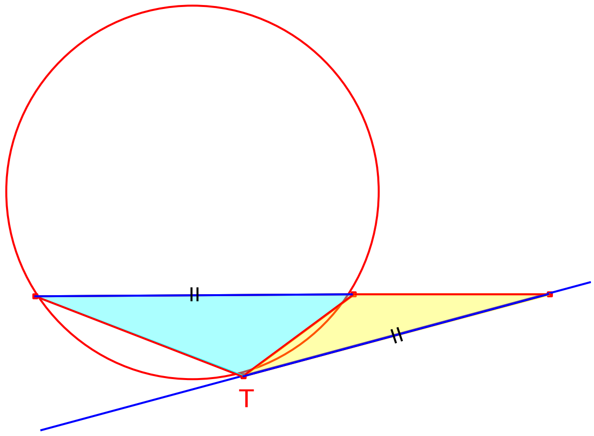
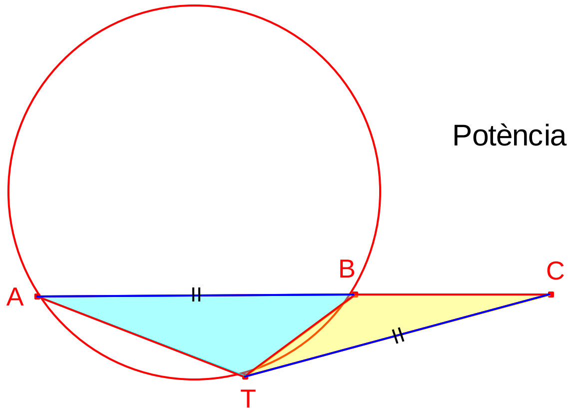
Problemes de Geometria per a l'ESO 534

5331.- La figura està formada per una circumferència, una recta tangent a la circumferència i una recta secant.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:



AB=CT=a, CB=b

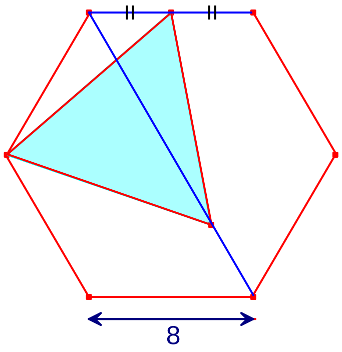
Potència de C respecte de la circumfrència

$b(a+b)=a^2$

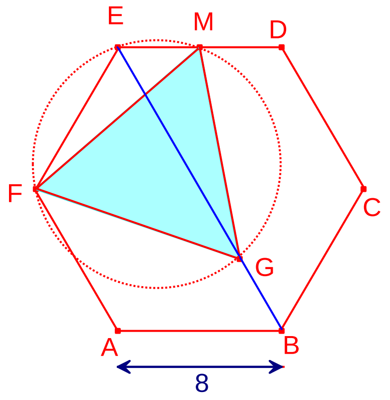
$a/b=\Phi$

$[ABT]/[BCT]=a/b=\Phi$

5332.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 8 i un triangle equilàter.
Proveu que un vèrtexs del triangle pertany a la diagonal.
Calculeu l'àrea del triangle equilàter.



Solució:



EFGM és cíclic

angleMEG=angleMFG=60º

G pertany a la diagonal BE

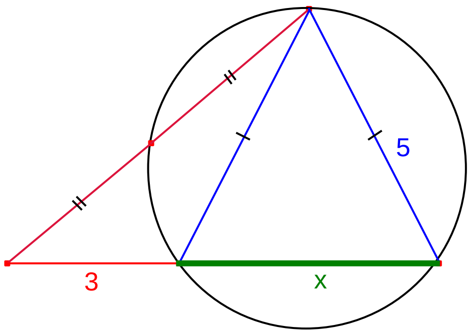
FM=c

teorema cosinus EFM

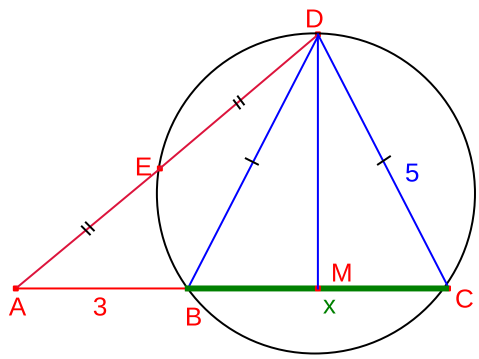
$c^2=64+16+32=112$

[FGM]=sqrt(3)/4·c^2=28·sqrt(3)

5333.- En la figura, calculeu la mesura del segment x



Solució:
Siga $\overline{AE} = \overline{DE} = a$
Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMD}$:

$$\overline{MD} = \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$$4a^2 = \left(3 + \frac{x}{2}\right)^1 - 25 - \frac{x^2}{4}$$

$$4a^2 = 34 + 3x$$

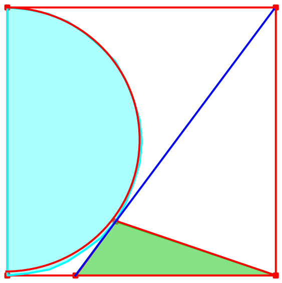
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència:

$$a \cdot 2a = 3(3 + x)$$

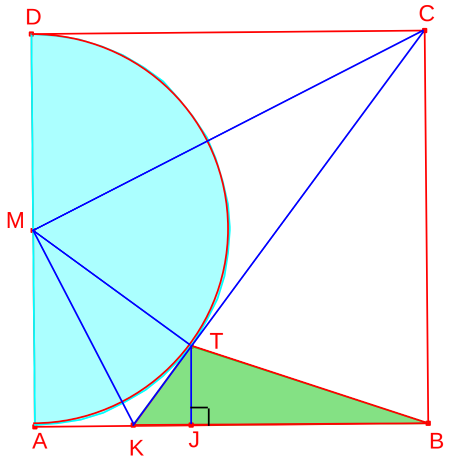
$$4a^2 = 18 + 6x$$

$$x = \frac{16}{3}$$

5334.- La figura està formada per un quadrat, una semicircumferència interior al quadrat, un segment tangent a la semicircumferència i un segment des d'un vèrtex al punt de tangència.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda.



Solució:



AB=2

CT=CB=2

Els triangles CDM, MAK són semblants i de raó 2 : 1

AK=TK=1/2

KC=5/2

BK=3/2

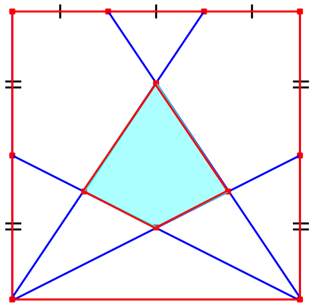
Els triangles KBC, KJT són semblants

JT=BC·KT/CK=2/5

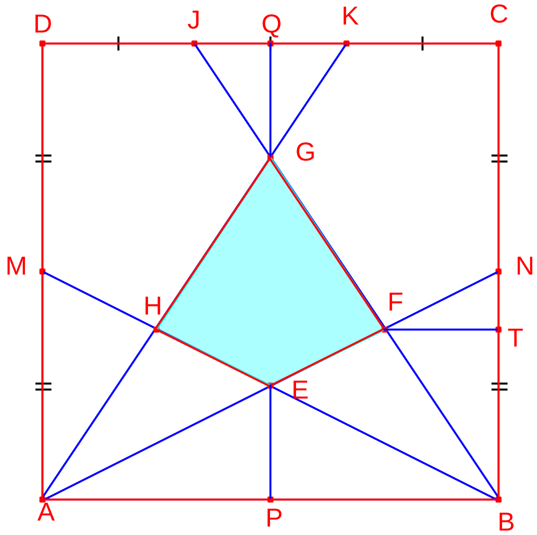
[KBT]=(1/2)·(3/2)·(2/5)=3/10

[Blava]/[Verda]=(5/3)·Pi

5335.- La figura està formada per un quadrat.
Els costats verticals s'han dividit en dues parts iguals i el superior en tres parts iguals.
S'han dibuixat quatre segments que formen un quadrilàter.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=6

ABG, KJG semblants 3:1

QG=3/2

ABN, APE semblants 2:1

PE=3/3

GE=3

FT=2x, NT=x

BT=3-x

BTF, BCJ semblants

4/2x = 6/(3-x)

x=3/4

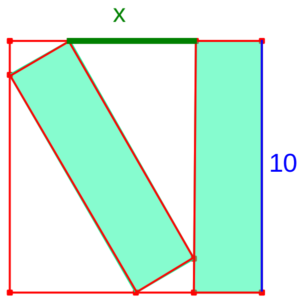
FT=3/2

HF=3

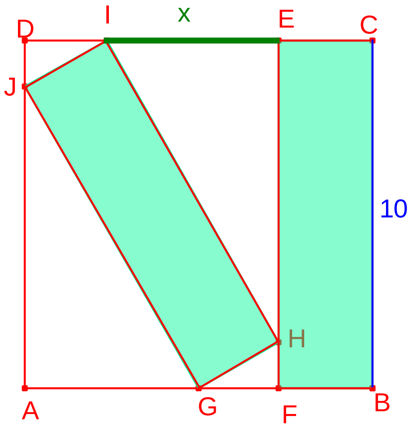
[EFGH]=(1/2)·GE·HF=9/2

[EFGH]/[ABCD]=1/8

5336.- La figura està formada per un quadrat de costat 10 que conté dos rectangles iguals.
Calculeu la mesura del segment x

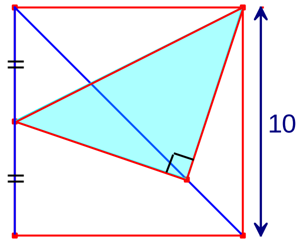


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siguen els rectangles $FBCE, GHIJ$, $\overline{GH} = \overline{FB} = a, \overline{HI} = 10$
Siga $\beta = \angle HGF = \angle IHE$

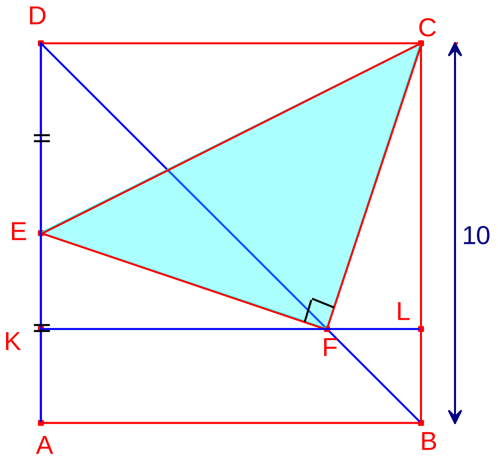


$x = 10 \cdot \sin\beta$
$a \cdot \sin\beta + 10 \cdot \cos\beta = 10$
$a + a \cdot \cos\beta + 10 \cdot \sin\beta = 10$
$a \cdot \sin\beta + 10 \cdot \cos\beta = a + a \cdot \cos\beta + 10 \cdot \sin\beta$
$$a = \frac{10(1 - \cos\beta)}{\sin\beta} = \frac{10(\sin\beta - \cos\beta)}{\sin\beta - \cos\beta - 1}$$
$$\frac{1 - \cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta - \cos\beta}{\sin\beta - \cos\beta - 1} = \frac{1 - \sin\beta}{1 + \cos\beta}$$
$1 - \cos^2\beta = \sin\beta - \sin^2\beta$
$$\sin\beta = \frac{1}{2}$$
$x = 10 \cdot \sin\beta = 5$

5337.- La figura està formada per un quadrat de costat 10 i un triangle rectangle amb l'angle recte sobre la diagonal.
Calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:



DE=5

CE=5·sqrt(5)

CL=DK=KF

angleFCL=angleKFE

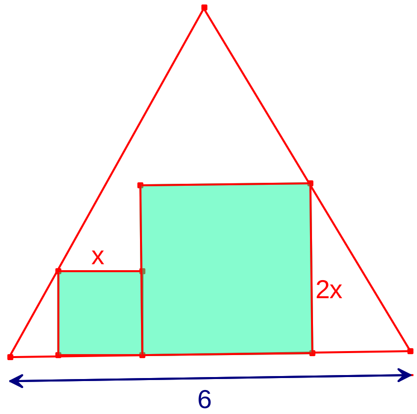
Els triangles FKE, CLF són iguals

EF=CF=CE·sqrt(2)/2

EF=(5/2)·sqrt(10)

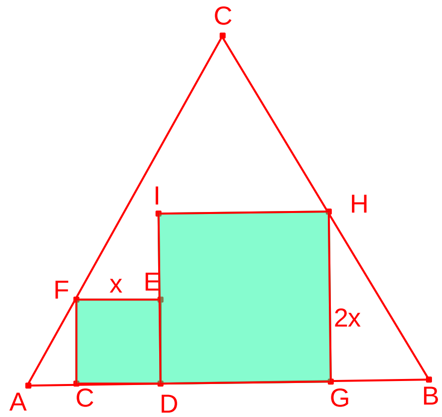
[EFC]=(1/2)·EF²=125/4

5338.- La figura està formada per un triangle equilàter de costat 6 i dos quadrats de costats x, 2x, respectivament.
Calculeu la suma de les àrees dels dos quadrats.

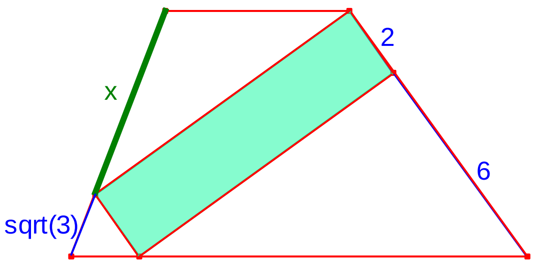


Solució:

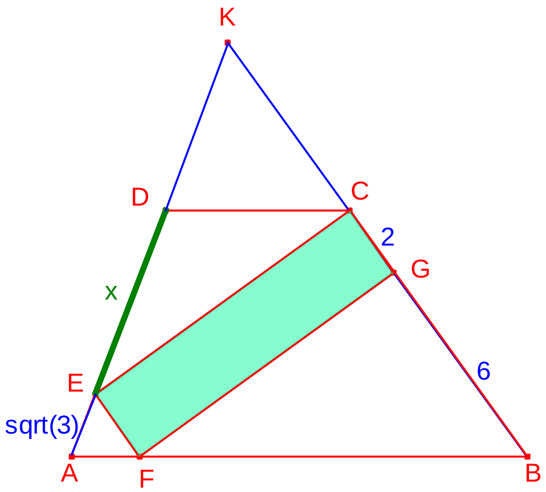
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 6$
Siga el quadrat $CDEF$ de costat $\overline{CD} = x$
Siga el quadrat $DGHI$ de costat $\overline{DG} = 2x$
$\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \overline{GB} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}x$
$\overline{AB} = 3x + x\sqrt{3} = 6$
$x = 3 - \sqrt{3}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = x^2 + (2x)^2 = 5x^2 = 30\left(2 - \sqrt{3}\right)$



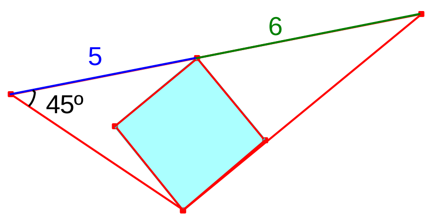
5339.- La figura està formada per un trapezi que conté un rectangle.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:
Siga el trapezi $ABCD$.
Siga el rectangle $CEFG, \overline{CG} = \overline{EF} = 2$
Les rectes AD, BC és tallen en el punt K.
Els triangles $\overset{\Delta}{AFE}, \overset{\Delta}{DCK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CK} = 2k, \overline{DK} = k\sqrt{3}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{DCK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x+\sqrt{3}}{8} = \frac{k\sqrt{3}}{2k}$$
$x = 3\sqrt{3}$



5340.- En la figura, un triangle conté un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $BDEF$ de costat $\overline{BD} = c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDC}$:
$\overline{CD} = \sqrt{36 - c^2}$
$\angle EBC = 45°$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BEC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c + \sqrt{36 - c^2}}{11} = \frac{6}{c + \sqrt{36 - c^2}}$$
Simplificant:
$c^4 - 36c^2 + 225 = 0$
L'àrea del quadrat és:
$S_{BDEF} = c^2 = 3\left(6 - \sqrt{3}\right)$