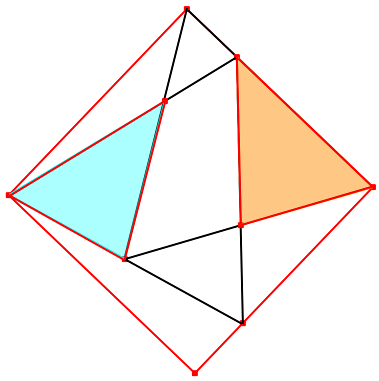
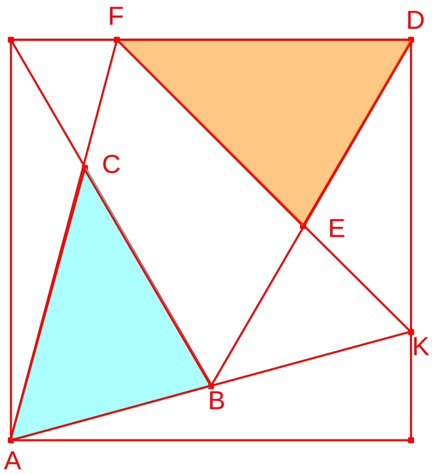
Problemes de Geometria per a l'ESO 536

5251.- La figura està formada per un quadrat que conté dos triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle blau i l'àrea del triangle taronja.



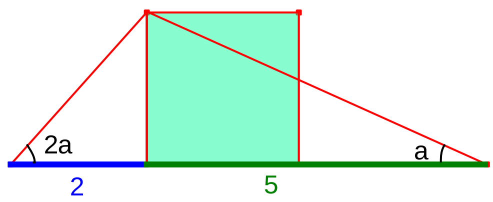
Solució:



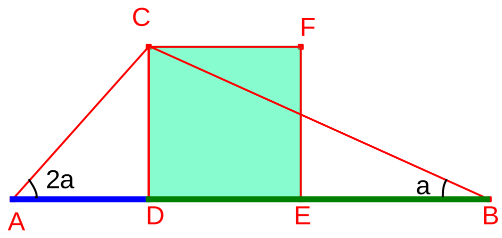
angleBAC=anbleEDF=60º
angleACB=angleDFE=45º
Els triangles ABC, DEF semblants
AF=c
AB=(1/2)c
DF=sqrt(2)/2·c
DF/sin 75º = DE/sin 45º
DE=(sqrt(6)-sqrt(2))/2

[blau]/[taronja]=AB²/DE²=(2+sqrt(3))/4

5352.- La figura està formada per un triangle i un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat.

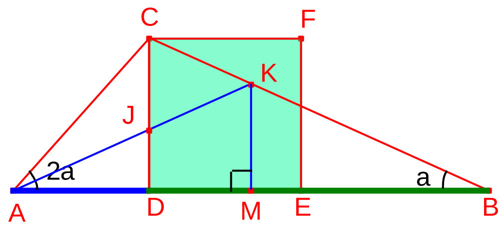


Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 2a, B = a$
Siga el quadrat $DEFC$ de costat $\overline{DE} = c$
Siga $\overline{AD} = 2, \overline{DB} = 5$
$\tan 2a = \frac{c}{2}, \tan a = \frac{c}{5}$
$$\frac{c}{2} = \frac{2 \cdot \frac{c}{5}}{1 - \frac{c^2}{25}}$$
Simplificant:
$c^2 = 5$
L'àrea del quadrat $DEFC$ és:
$S_{DEFC} = c^2 = 5$

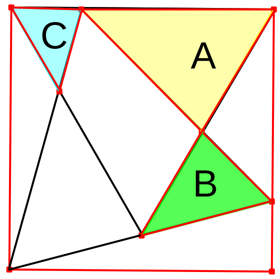
Solució 2:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 2a, B = a$
Siga el quadrat $DEFC$ de costat $\overline{DE} = c$
Siga $\overline{AD} = 2, \overline{DB} = 5$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
AK és bisectriu de l'angle.
Siga $\overline{MK} = b, \overline{AJ} = d$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDB}, \overset{\Delta}{KMB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c}{5} = \frac{b}{\frac{7}{2}}$$
$$b = \frac{7}{10}c$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADJ}, \overset{\Delta}{AMK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{b}{\frac{7}{2}} = \frac{d}{2}$$
$$d = \frac{4}{7}b = \frac{2}{5}c$$
Aplicant la propietat de la Bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:
$$\frac{\frac{3}{5}c}{\overline{AC}} = \frac{\frac{2}{5}c}{2}$$
$\overline{AC} = 3$

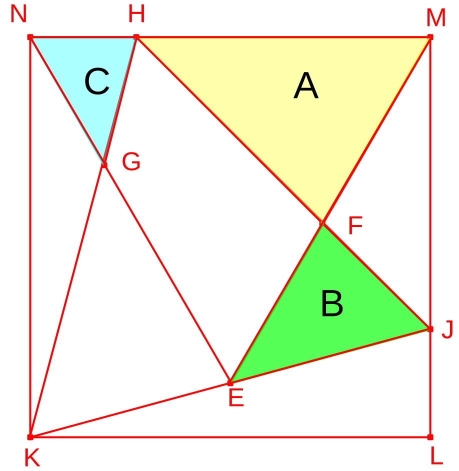
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$
$c^2 = 9 - 4 = 5$
L'àrea del quadrat $DEFC$ és:
$S_{DEFC} = c^2 = 5$

5353.- La figura està formada per un quadrat que conté dos triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre les àrees $A : B : C$



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KJH}$ de costat $\overline{KJ} = 1$
$\angle KNE = 30°, \angle NKH = 15°$
$\angle NGH = 45°$
$\angle MHF = 45°$
$\angle FEJ = 45°$



Els triangles $\overset{\Delta}{EJF}, \overset{\Delta}{HMF}, \overset{\Delta}{GNH}$ són semblants d'angles $45°, 60°, 75°$

$\overline{MH} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$

$\overline{EJ} = \overline{KE} = \frac{1}{2}c$

$\overline{NH} = c \cdot \sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}c$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{GNH}$:

$$\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}c}{\sin 45°} = \frac{\overline{NG}}{\sin 75°}$$

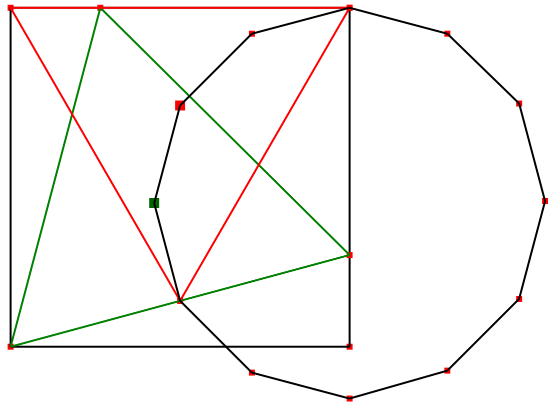
$\overline{NG} = \frac{\sqrt{2}}{4}c$

La proporció que cerquem és:

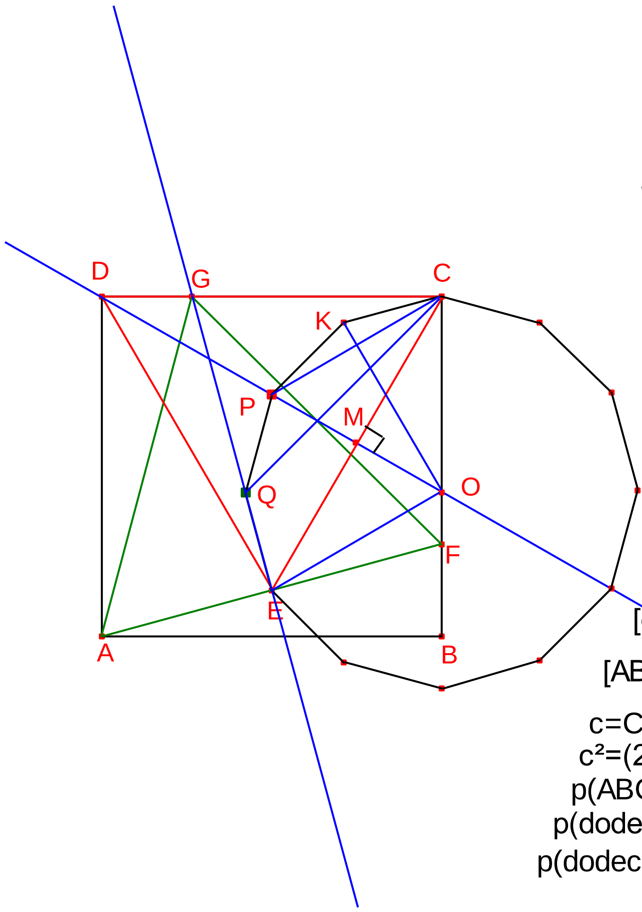
$$A . B : C = \overline{MH}^2 : \overline{EJ}^2 : \overline{NG}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 4 : 2 : 1$$

5354.- La figura està formada per un quadrat que conté dos triangles equilàters.
S’ha dibuixat un dodecàgon regular que dos vèrtexs són vèrtexs d’un triangle equilàter.
Dos vèrtexs del dodecàgon són centres dels triangles equilàters.

Calculeu la proporció entre l’àrea del quadrat i l’àrea del dodecàgon.
Calculeu la proporció entre el perímetre del dodecàgon i el perímetre del quadrat.

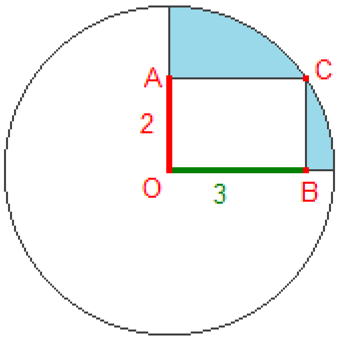


Solució:



AB=CE=1
O centre dodecàgon regular
OP mediatriu CE
anglePCE=30º
angle PCD=30º
P centre del triangle CDE
angle QBC=45º
angle CEF=45º
angle QEF=90º
Q pertany mediatriu AF
angle QCE=15º
angleQCF=angle GCQ=45º
Q pertany a la mediatriu GF
Q centre del triangle AFG
r=OC
angle ECO=angle CEO=30º
r=sqrt(3)/3
[ABCD]=1
[dodecàgon]=12·(1/2)·r^2·(1/2)=1
[ABCD]=[dodecàgon]
c=CK
c^2=(2-sqrt(3))/3
p(ABCD)=4
p(dodecàgon)=12·c=4·sqrt(6-3·sqrt(3))
p(dodecàgon)/p(ABCD)=sqrt(6-3·sqrt(3))

5355.- La figura està formada per una circumferència de dintre O i el rectangle $OACB$, calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució.

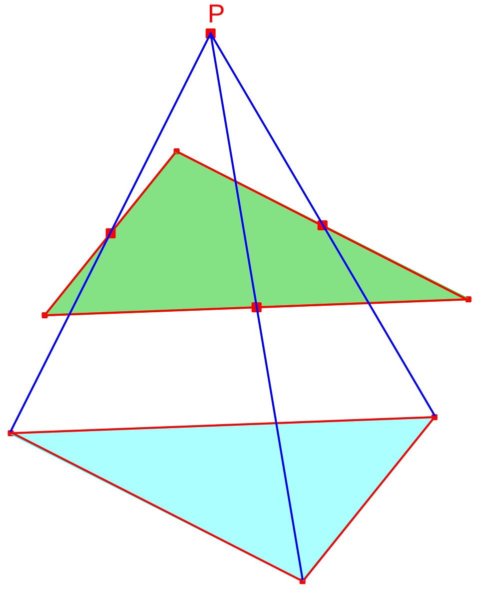
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAC}$:

$\overline{OC} = \sqrt{13}$ radi de la circumferència.

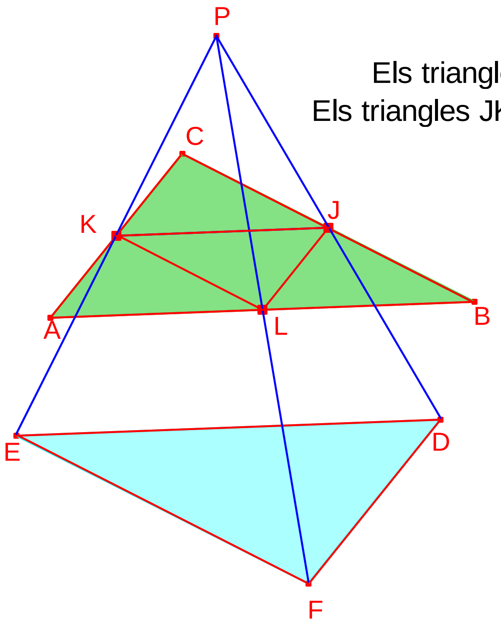
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrant menús l'àrea del rectangle $OACB$:

$$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{13}\right)^2 - 2\cdot 3 = \frac{13\pi - 24}{4} \approx 4.2102$$

5356.- En la figura el punt P es reflecteix respecte dels punts migs dels costats del triangle verd. Les tres imatges de la reflexió formen el triangle blau. Demostreu que els dos triangles tenen la mateixa àrea.



Solució:

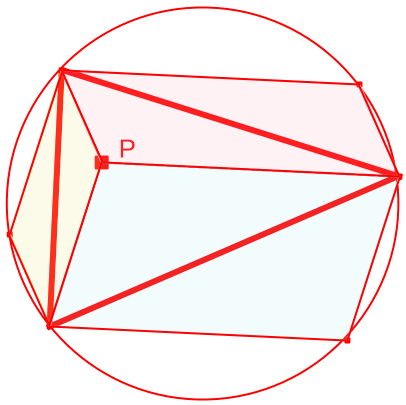


Els triangles JKL, ABC semblants de raó 1:2

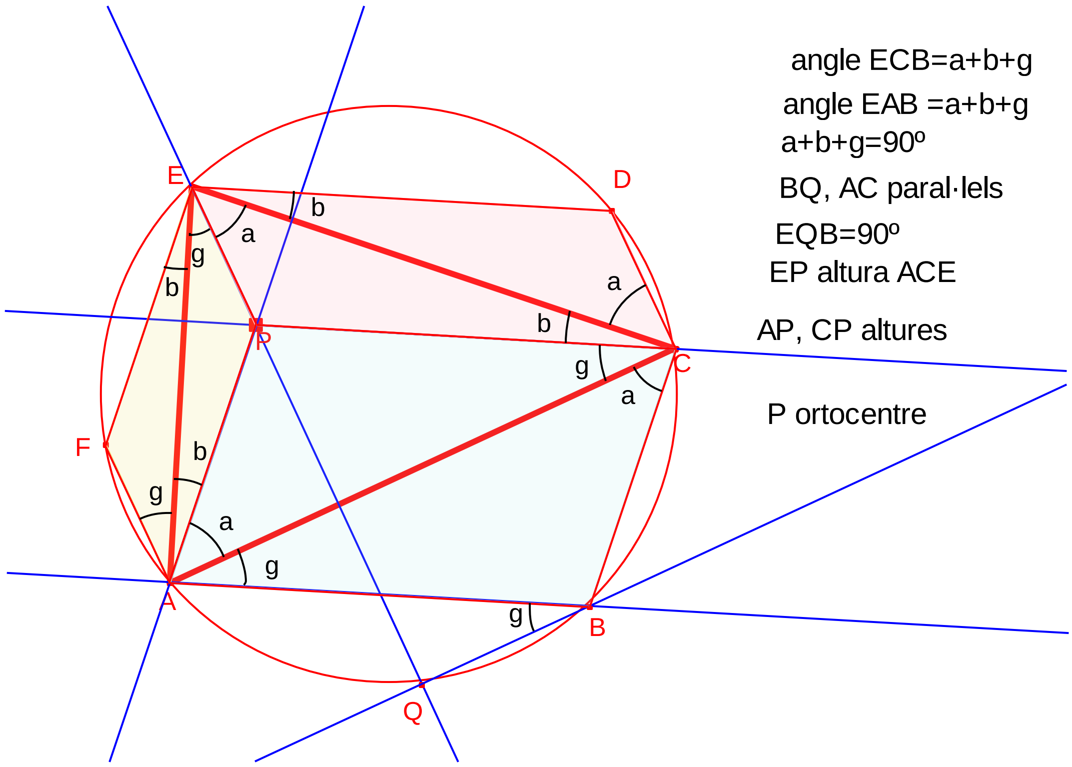
Els triangles JKL, DEF homotètics de centre P i raó 1:2

[ABC] = [DEF]

5357.- La figura està formada per una circumferència que conté tres paral·lelograms. Demostreu que el vèrtex P és l'ortocentre del triangle ressaltat.



Solució:



angle ECB=a+b+g

angle EAB =a+b+g

a+b+g=90º

BQ, AC paral·lels

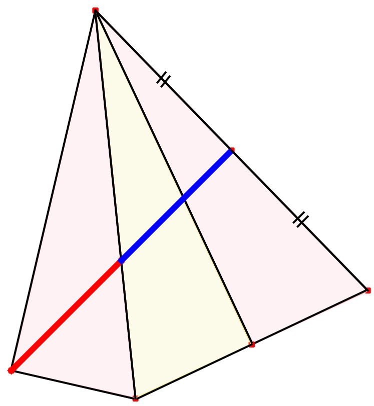
EQB=90º

EP altura ACE

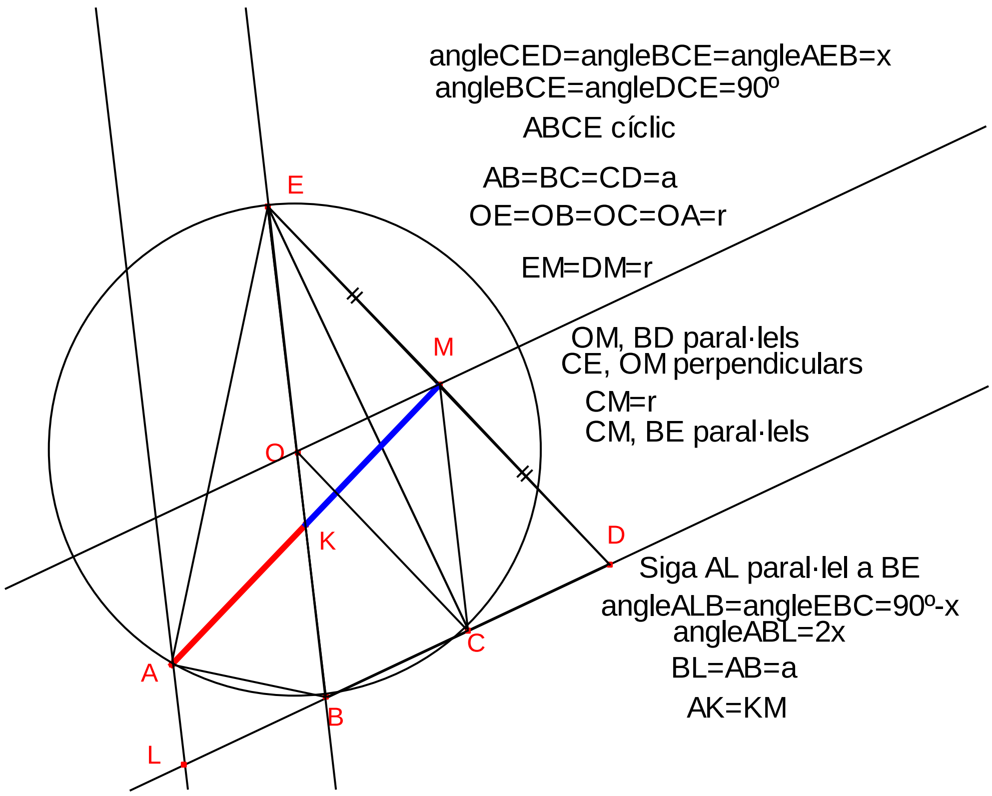
AP, CP altures

P ortocentre

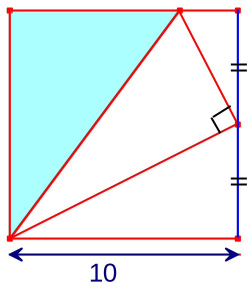
5358.- En la figura, els tres triangles són iguals i formen un quadrilàter.
Calculeu la proporció entre el segment roig i el segment blau.



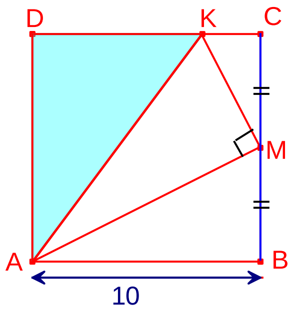
Solució:



5359.- La figura està formada per un quadrat de costat 10. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



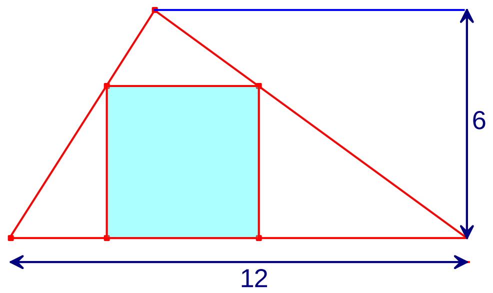
Els triangles ABM, MCK són semblants

CM=5, CK=5/2

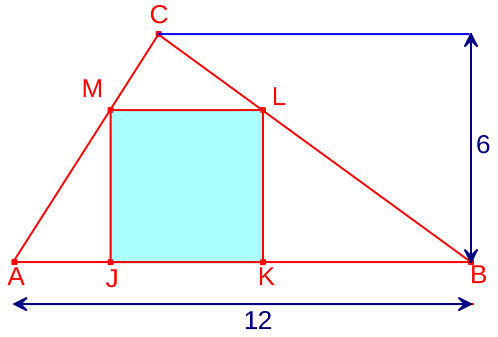
DK=15/2

[ADK]=(1/2)·10·(15/2)=72/2

5360.- La figura està formada per un triangle i un quadrat inscrit.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:



JK=c

Els triangles MLC, ABC són semblants

$c/12 = (6-c)/6$

$c=4$

$[JKLM]=c^2=16$