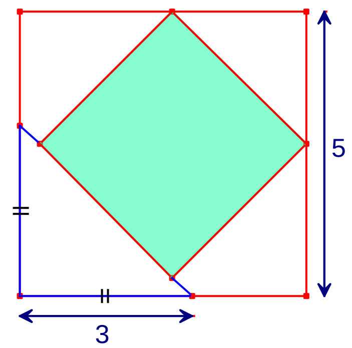
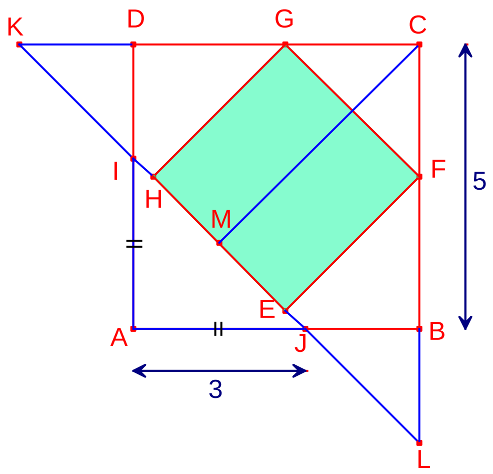
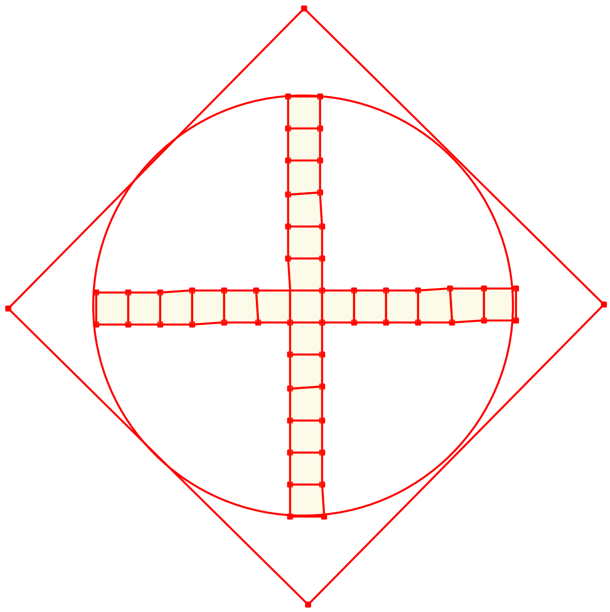
5361.- La figura està formada per un quadrat de costat 5
i un quadrat ombrejat en l'interior.
Calculeu l'àrea del quadrat interior.



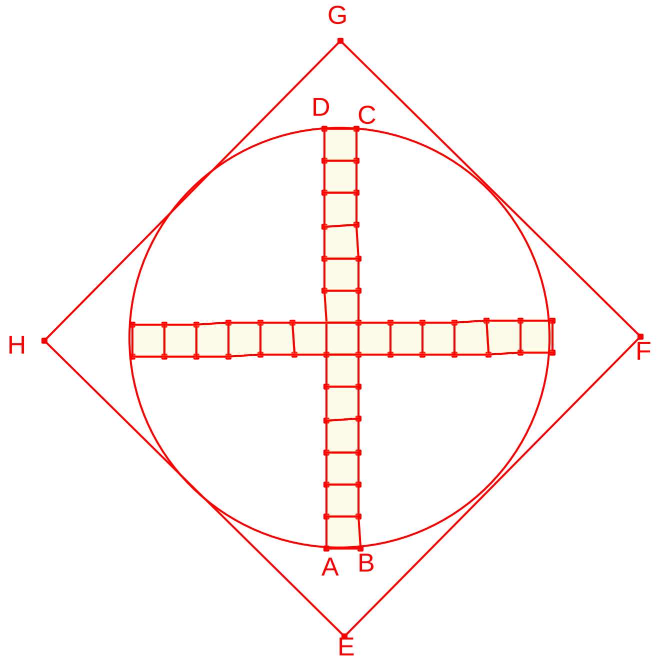
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 5$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = c$
$\overline{AJ} = \overline{AI} = 3$
$\overline{DK} = \overline{BL} = \overline{JB} = 2$
$\overline{CK} = 7, \overline{KL} = 7\sqrt{2}$
$\overline{ML} = \frac{7\sqrt{2}}{2}, \overline{ME} = \frac{1}{2}c$
$\overline{EL} = \frac{7\sqrt{2} - c}{2} = c$
$c = \frac{7\sqrt{2}}{3}$
L'àrea del quadrat ombrejat és:
$S_{EFGH} = c^2 = \frac{98}{9}$



5262.- La figura està formada per un quadrat la seua circumferència inscrita i 25 quadrat iguals formant una creu.
Proveu que la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior és:
$\frac{F_5}{F_9}$



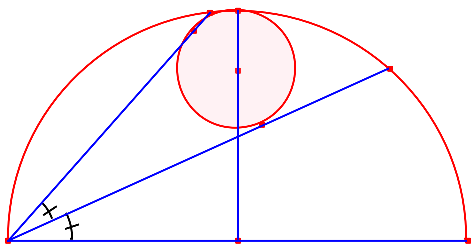
Solució:



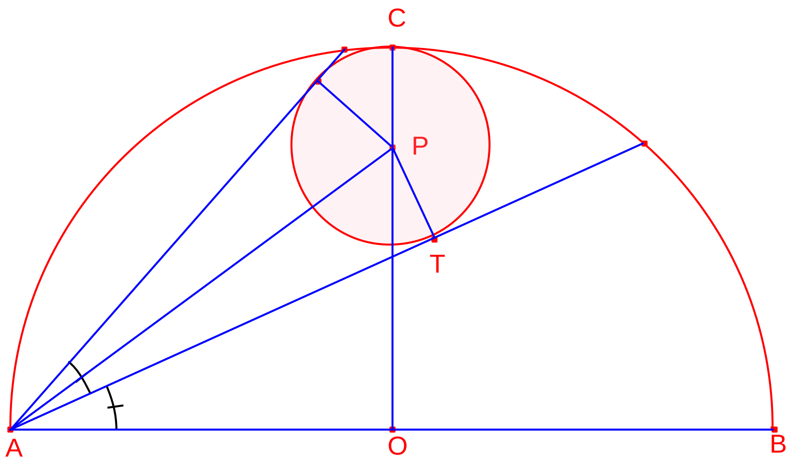
Siga AB=1
$\overline{AD} = 13$
$\overline{EF} = \overline{AC} = \sqrt{170}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{EFGH}} = \frac{25}{170} = \frac{5}{34} = \frac{F_5}{F_9}$

Série de Fibonacci:
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$

5363.- La figura està formada per dos quadrants i un cercle rosa tangent a dues cordes.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea total.

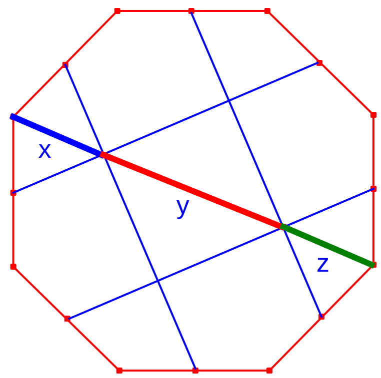


Solució:

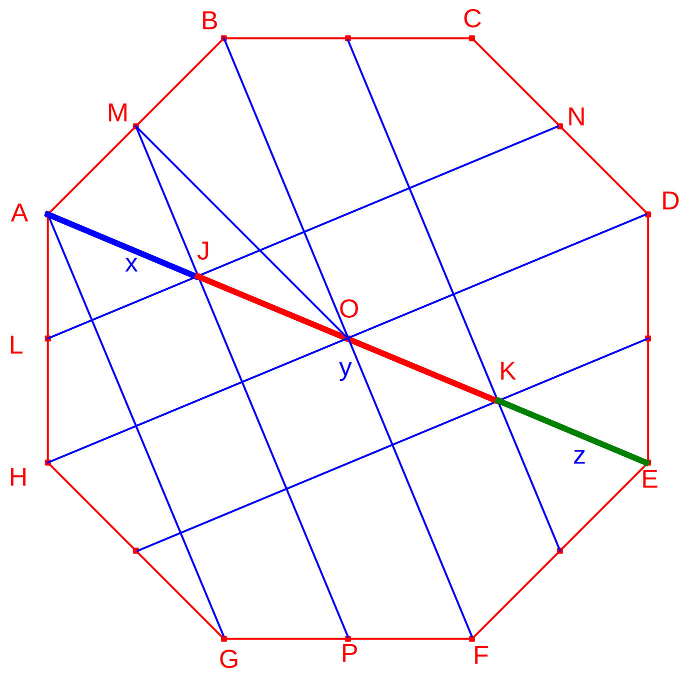


Siguen $\overline{OA} = R, \overline{PC} = r$
Siguen $\angle PAT = \alpha, \angle TAO = 2\alpha$
$\angle PAO = 3\alpha, \overline{OP} = R - r$
$a = \overline{AP} = \sqrt{2R^2 - 2rR + r^2}$
$\sin\alpha = \dfrac{r}{a}, \sin 3\alpha = \dfrac{R-r}{a}$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{r}{R-r} = \frac{\sin\alpha}{3\cdot\sin\alpha - 4\cdot\sin^3\alpha} = \frac{1}{3 - 4\sin^2\alpha} = \frac{1}{3 - 4\dfrac{r^2}{2R^2 - 2rR + r^2}}$$
$9r^2 - 10Rr + 2R^2 = 0$
$\dfrac{r}{R} = \dfrac{5-\sqrt{7}}{9}$
La proporció és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{semicerccle}} = 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{4(16 - 5\sqrt{7})}{81} \approx 0.1369$$

5364.- La figura està formada per un octògon regular i quatre segments que uneixen els punts migs dels costats.
Calculeu la proporció de segments $x : y : z$



Solució:



x=AJ=KE=z, y=JK

MP, LN perpendiculars
MP, HD perpendiculars
angleAOH=45º

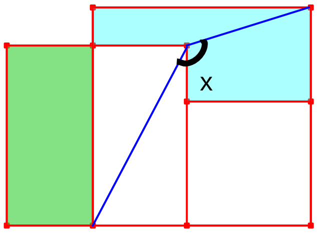
anglePLE=45º
angleGAE=45º
angleLJA=45º
Els punts A, J, E aliniats

angleAJM=45º
angleLAJ=135º/2
angleAMJ=135º/2
AJ=MJ

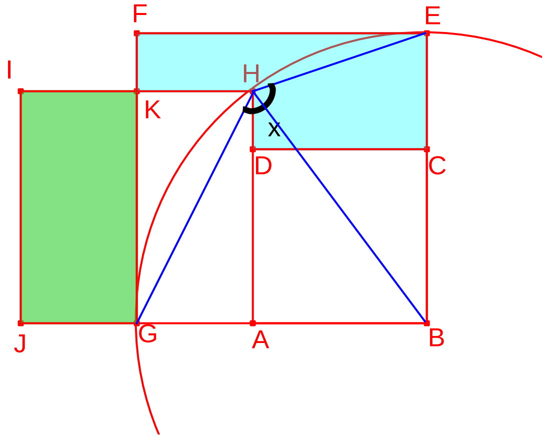
angleAOM=45º/2
angleMJO=135º
angleJMO=45º/2
MJ=OJ

x : y : z = 1 : 2 :1

5365.- La figura està formada per tres quadrats.
L'àrea verda i l'àrea blava són iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



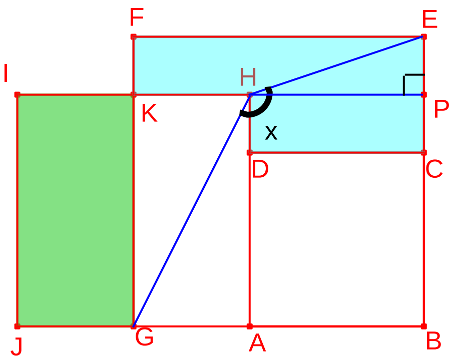
Solució 1:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga el quadrat $AHIJ$ de costat $\overline{AH} = c$



$\overline{JG} = a + c - b, AG = b - a$
$S_{FKIJ} = S_{DCEFKH}$
$(a + c - b) = b^2 - a^2 - (b - a)c$
Simplificant:
$c^2 = b^2 - a^2$

$\overline{BH}^2 = a^2 + c^2 = b^2$
$\overline{BE} = \overline{BG} = \overline{BH}$
x és angle inscrit de la circumferència que passa per G, H, E. I abraça 270º
$x = 135°$

Solució 2:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga el quadrat $AHIJ$ de costat $\overline{AH} = c$

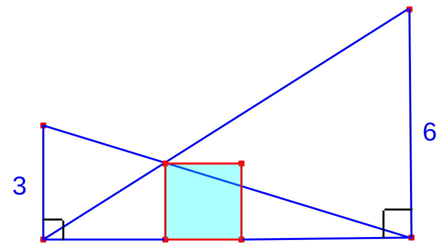


Siga $\alpha = \angle GHA, \beta = \angle EHP$
$\overline{PE} = b - c, AG = b - a$
$S_{FKIJ} = S_{DCEFKH}$
$(a + c - b) = b^2 - a^2 - (b - a)c$
Simplificant:
$c^2 = b^2 - a^2$
$\tan\alpha = \dfrac{b-a}{c}, \tan\beta = \dfrac{b-c}{a}$

$$tam\,(\alpha+\beta) = \frac{\frac{b-a}{c} + \frac{b-c}{a}}{1 - \frac{b-a}{c} \cdot \frac{b-c}{a}} = \frac{ab - a^2 + bc - c^2}{ac - b^2 + bc - ac + ab} = \frac{ab + bc - b^2}{ab + bc - b^2} = 1$$

$\tan x = -ctg(a + b) = -1$
$x = 135°$

5366.- En la figura, calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen $\overline{JA} = a, \overline{KA} = b$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MJK}, \overset{\Delta}{DAK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c}{3} = \frac{b}{a+b}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JKL}, \overset{\Delta}{JAD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c}{6} = \frac{a}{a+b}$$

Dividint ambdues expressions:

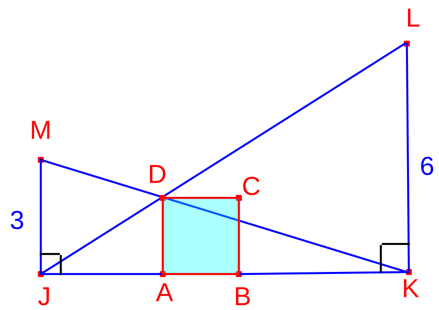
$b = 2a$

$$\frac{c}{6} = \frac{a}{a+2a} = \frac{1}{3}$$

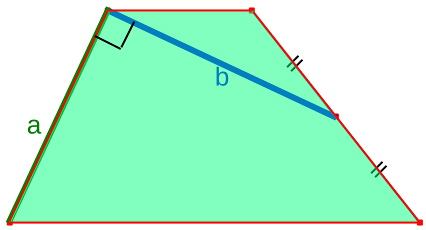
$c = 2$

L'àrea del quadrat $ABCD$ és:

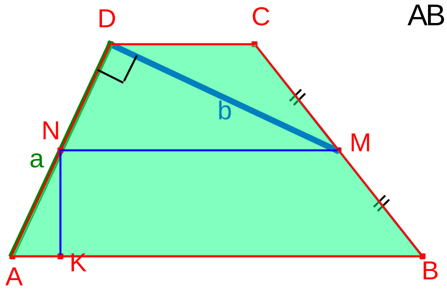
$S_{ABCD} = c^2 = 4$



5367.- La figura està formada per un trapezi.
Calculeu l'àrea del trapezi en funció de a, b.



Solució:



AB=x, CD=y, MN=c

x+y=2c

NK=h/2

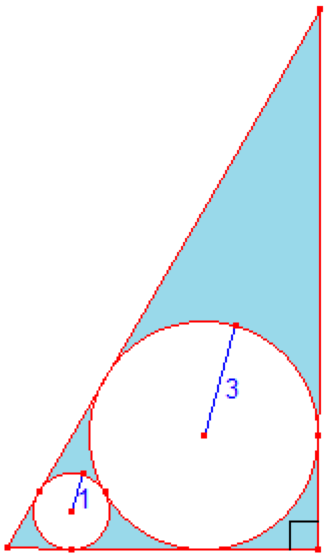
Els triangles NDN, NKA semblants

h/a = b/c

h=ab/c

[ABCD]=(x+y)h/2=2c·(ab/c)/2=ab

5368.- La figura està formada per un triangle rectangle que conté la seua circumferència inscrita de radi 3 i una circumferència tangent de radi 1.
Calculeu l'àrea ombrejada.

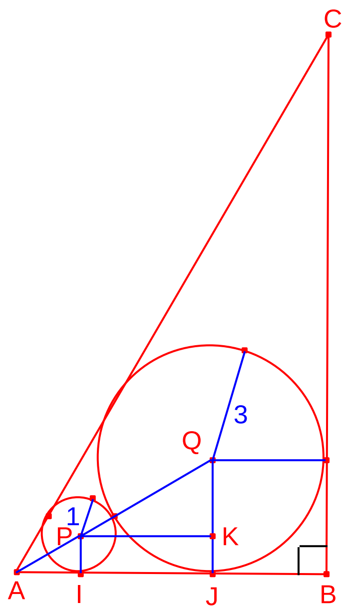


Solució:

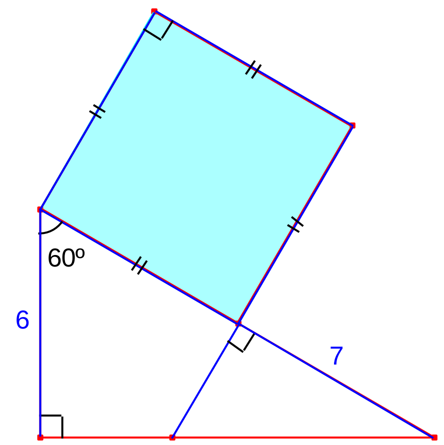
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°$
$\overline{PQ} = 4, \overline{QK} = 2$
$\angle QPK = 30°$
$\angle BAC = 2 \cdot 30° = 60°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:
$\overline{PK} = 2\sqrt{3}$
Siga $\overline{AI} = a$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PKQ}, \overset{\Delta}{AIP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{1}{a} = \frac{2}{2\sqrt{3}}$
$a = \sqrt{3}$
$\overline{AB} = 3 + 3\sqrt{3}$
$\overline{BC} = \sqrt{3} \cdot \overline{AB} = 3\left(3 + \sqrt{3}\right)$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = \frac{1}{2}\left(3 + 3\sqrt{3}\right)3\left(3 + \sqrt{3}\right) - \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2 = 9\left(3 + 2\sqrt{3}\right) - 10\pi$

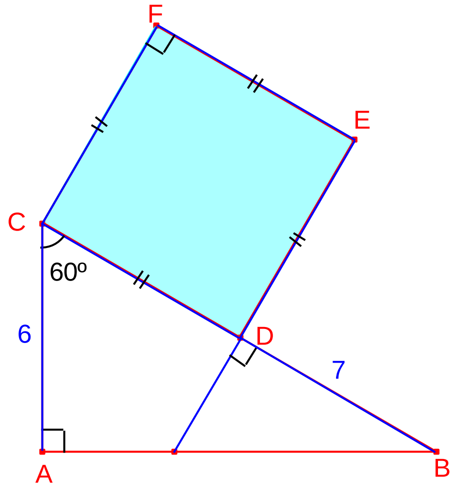


5369.- La figura està
formada per un triangle rectangle, amb un angle agut de 60º i un catet que mesura 6.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.

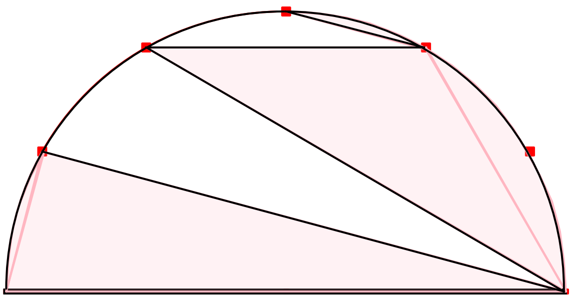


Solució:

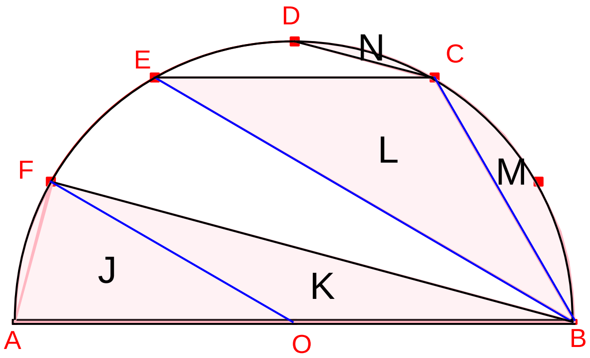
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, C = 60°, \overline{AC} = 6$
El quadrilàter $CDEF$ és un quadrat.
$\overline{BC} = 2 \cdot 6 = 12$
$\overline{CD} = 12 - 7 = 5$
L'àrea del quadrat $CDEF$ és:
$S_{CDEF} = \overline{CD}^2 = 25$



5370.- La figura està formada per una semicircumferència dividida en sis parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle.



Solució:



S=[semicercle]

[CEB]=[CEO]

[OBF]=[DOC]

L+M=(1/3)S

K+N=(1/6)S

J=(1/6)S

J+K+L+M+N=(2/3)S