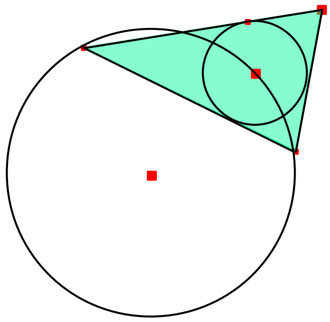
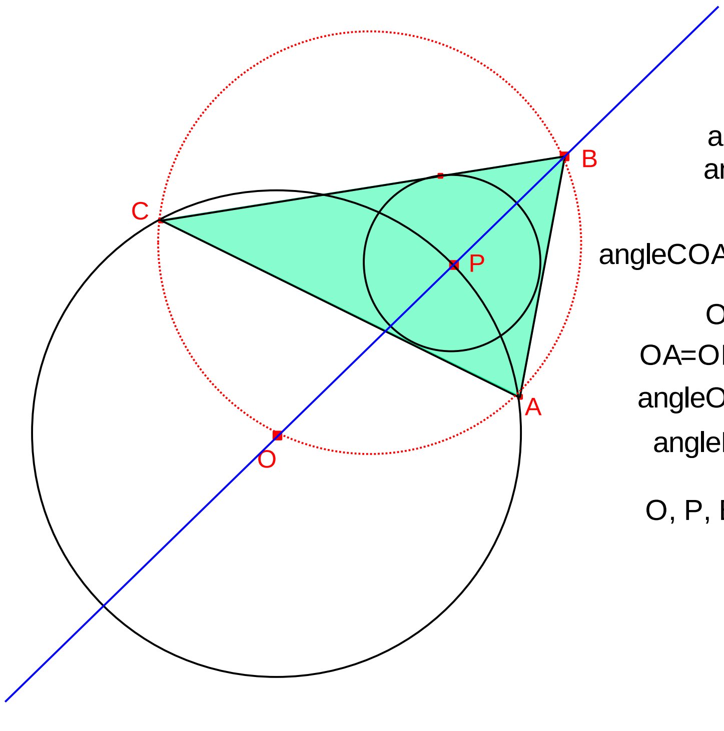
Problemes de Geometria per a l’ESO 538

5371.- En la figura la circumferència menuda té el centre en la circumferència gran i també és la circumferència inscrita al triangle.
Demostreu que els centres de les dues circumferències i el vèrtexs del triangle són col·lineals.



Solució:



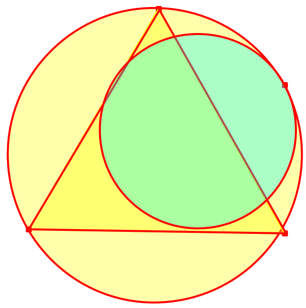
angleCAP=A/2
angleACP=C/2

angleCOA=2(angleCAP+AngleACP)=A+C

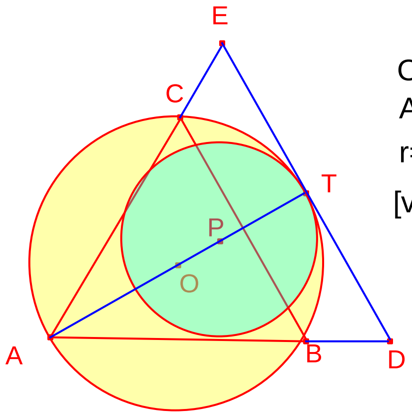
OABC cíclic
OA=OB, angleOAC=90º-(A+C)/2=B/2
angleOBA=angleOCA=B/2
anglePBA=B/2

O, P, B alineats

5372.- La figura està formada per un triangle equilàter i dues circumferències.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea groga.



Solució:



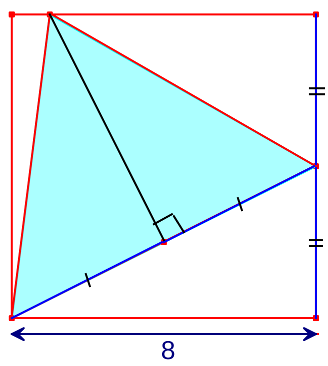
OA=1

AT=2

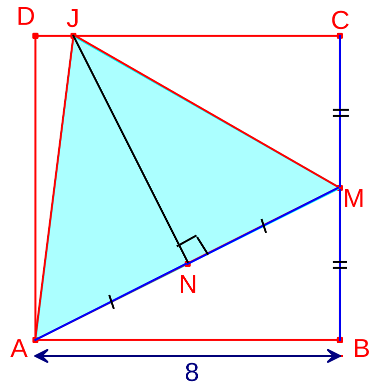
r=PT=AT/3=2/3

[verda]/[groga] = $r^2/(1^2-r^2)=4/5$

5373.- La figura està formada per un quadrat de costat 8 i un triangle interior.
Calculeu l'àrea del triangle interior.

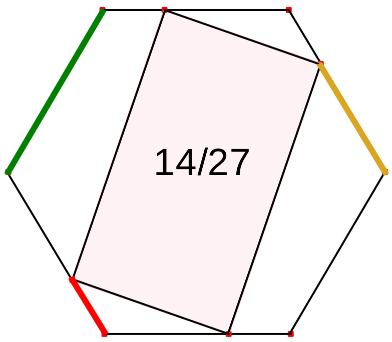


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 8$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$

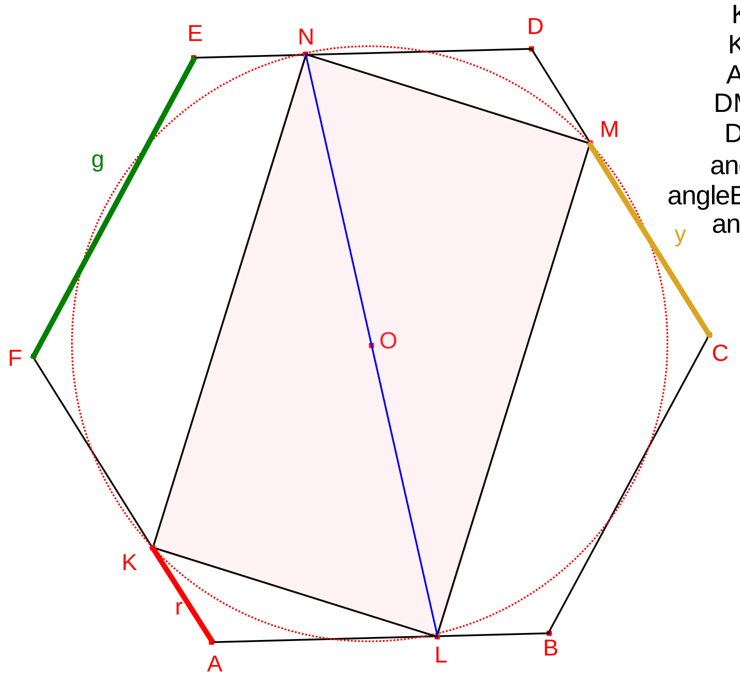


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:
$\overline{AM} = 4\sqrt{5}$
Siga N el punt mig del costat $\overline{AM}$
$\overline{AN} = 2\sqrt{5}$
El triangle $\overset{\Delta}{AMJ}$ és isòsceles.
Siga $\overline{AJ} = \overline{MJ} = c, \overline{JN} = h$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADJ}$:
$\overline{DJ} = \sqrt{c^2 - 64}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MCJ}$:
$\overline{CJ} = \sqrt{c^2 - 16}$
$\sqrt{c^2 - 64} + \sqrt{c^2 - 64} = 8$
Resolent l'equació:
$c^2 = 65$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANJ}$:
$h = \sqrt{c^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 3\sqrt{5}$
L'àrea del triangle ombrejat:
$S_{AMJ} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 30$

5374.- La figura està formada per un rectangle inscrit en un hexàgon regular, que cobreix $\frac{14}{27}$ de la seua àrea.
Calculeu la proporció de les mesures dels segments: $groc : vermell : verd$



Solució:



KL=MN=a

KN=LM=b

AB=FE=g

DM=NE=AK=r

DN=CM=y

angleNMD=p, angleKNL=q

angleENK=30º+p, angleENL=30º+p+q

angleDMN=angle ENL=p+90º-q

angleKNL=30º

b=a·sqrt(3)

[ABCDEF]=(3/2)sqrt(3)·g^2

[KLMN]=ab=(14/27)[ABCDEF]

ab=(7/9)sqrt(3)·g^2

teorema cosinus MDN

$a^2=r^2+y^2+ry$

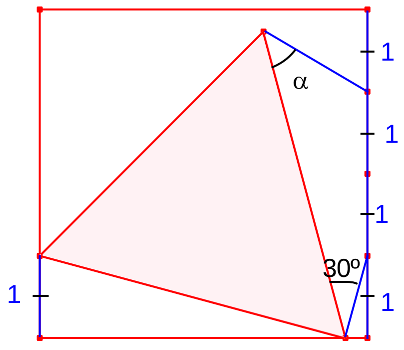
$r^2+y^2+ry=(7/9)g^2=(79)(r+y)^2$

$2r^2-5ru+2y^2=0$

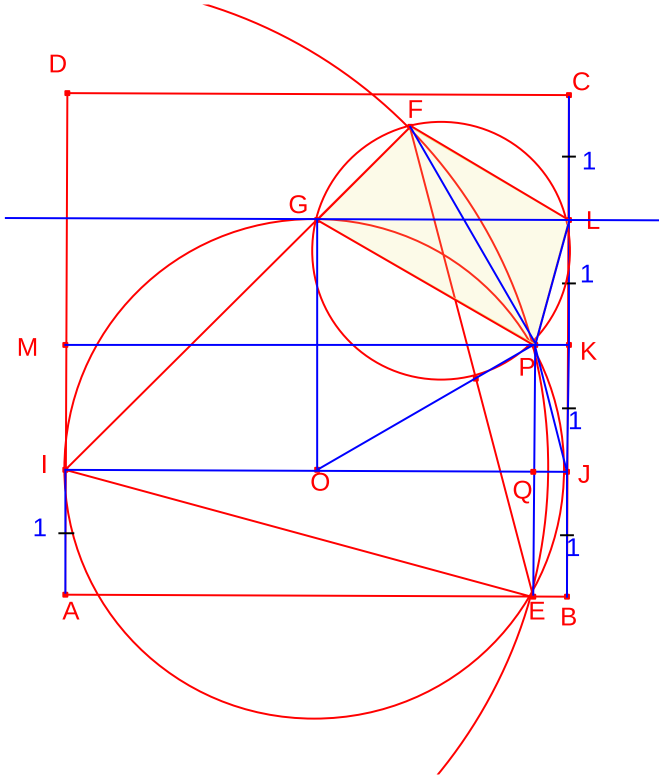
r/y = 1/2

r : y : g = 1 : 2 : 3

5375.- La figura està formada per un quadrat de costat 4 i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle α

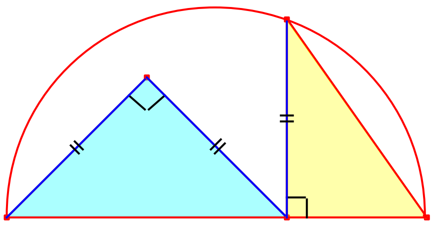


Solució:

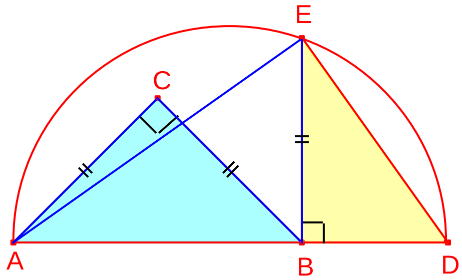


angleIEJ=60º+30º=90º
AI=BJ=JK=KL=LC=1
PQ=1, OP=2
anglePAQ=30º
angleGOP=60º
EP=PG=PF
angleEFP=angleFEP=15º
angleFGQ=45º
angleLGP=30º
angleIAE=angleEJB=anglePLK=15º
angleMPG=30º
angleFPL=45º
PLFG cíclic
anglePFL=angleLGP=30º
angleEFL=15º+30º=45º

5376.- La figura està formada per una semicircumferència que conté dos triangles rectangles.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:



AC=BC=BE=a

BD=x

AB=a·sqrt(2)

angleAED=90º

Teorema altura AED

a²=a·sqrt(2)·x

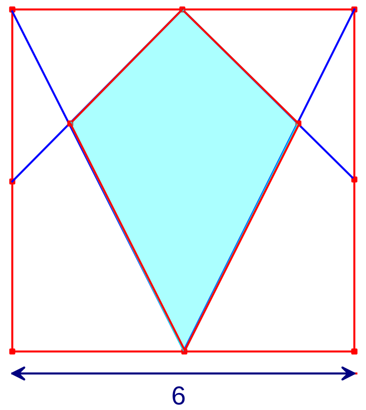
x=a·sqrt(2)/2

[ABC]=a²/2

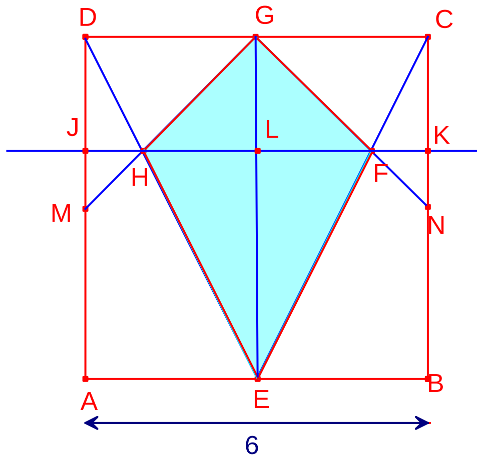
[BDE]=a²/4·sqrt(2)

[ABC]/[BDE]=sqrt(2)

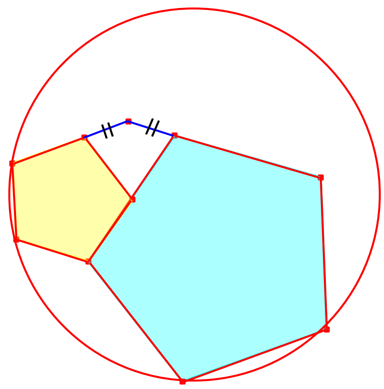
5377.- La figura està formada per un quadrat de costat 6 i els punts migs dels costats.
Determineu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



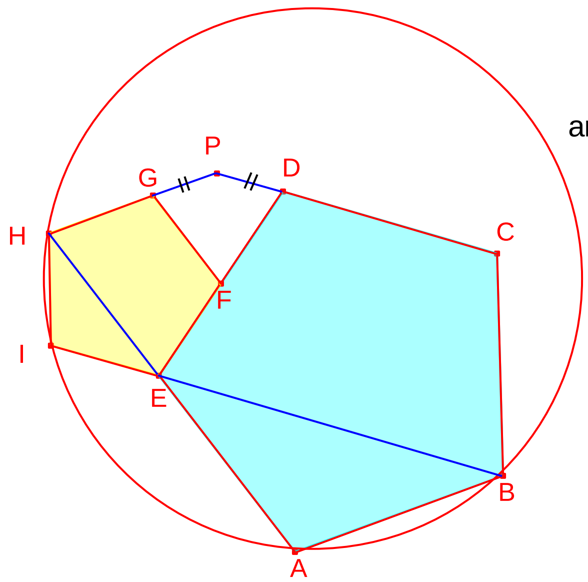
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6$
El quadrilàter ombrejat $EFGH$ és un cometa.
$\overline{JL} = 3$
Els triangles $\overset{\Delta}{MHD}, \overset{\Delta}{EHG}$ de raó $1 : 2$
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{JH} = 1, \overline{HL} = 2, \overline{HF} = 4$
L'àrea del cometa ombrejat és:
$S_{EFGH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$



5378.- La figura està formada per una circumferència que conté dos pentàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



Solució:

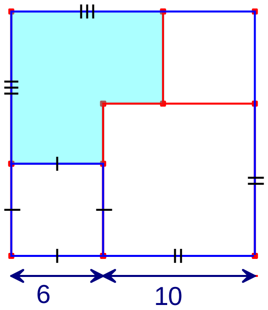


angleIBA=angleIHA=36º

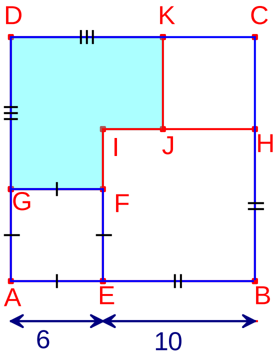
HIAB cíclic

Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el pentàgon regular $EFGHI$ de costat $\overline{EF} = b$
Siga $\overline{PD} = \overline{PG}, \angle PGF = \angle PDF = 72°$
El quadrilàter $FDPG$ és un cometa, $\overline{DF} = \overline{FG} = b$
$a = 2b$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{EFGHI}} = \frac{a^2}{b^2} = 4$$

5379.- La figura està formada per tres quadrats de costats 6, 10 i 16.
Calculeu l'àrea ombrejada.



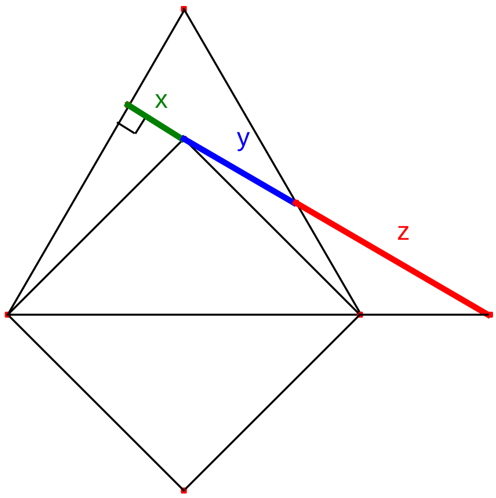
Solució:



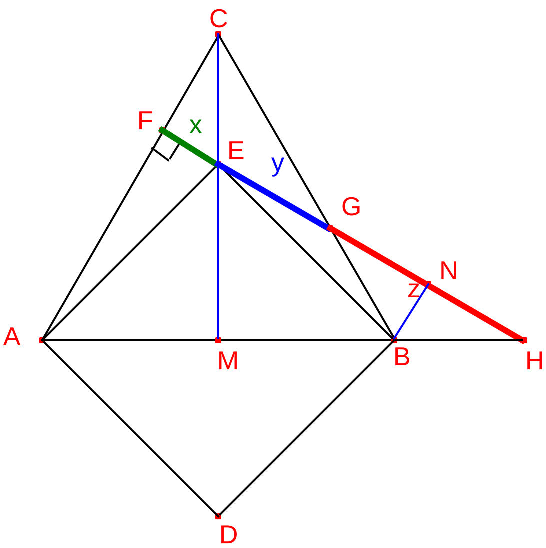
$JH=CH=6$

$[GFIJKD]=16^2-(10^2+2\cdot 6^2)=84$

5380.- La figura està formada per un triangle equilàter i un quadrat.
Es dibuixa una recta perpendicular a un costat del triangle equilàter que passa per un vèrtex del quadrat.
Calculeu la proporció entre la mesura dels segments $x : y : z$



Solució:



BG=EG=CE=y

x/y=1/2

z/(2y)=sqrt(3/2)

z/y = sqrt(3)

x : y : z =1 : 2 : 2·sqrt(3)