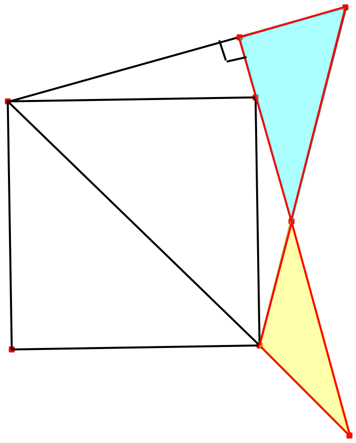
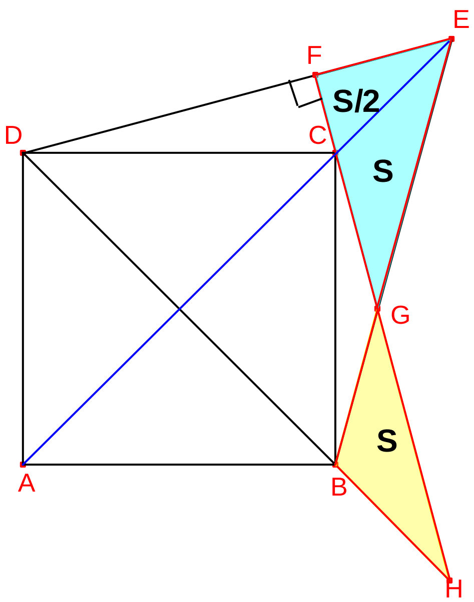
5381.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter.
Calculeu la proporció entre les àrees dels triangles blau i groc.



Solució:



AE mediatriu de BD

angleBHC=angleCEB=30º

angleBCH=angleCBE=15º

Els triangles BHC, CEB són iguals

[HBG]=[GCE]=S

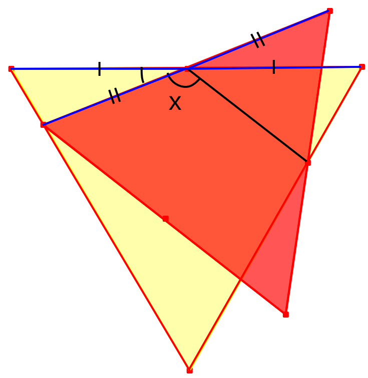
CG=BG=CE

CF=CE/2=CG/2

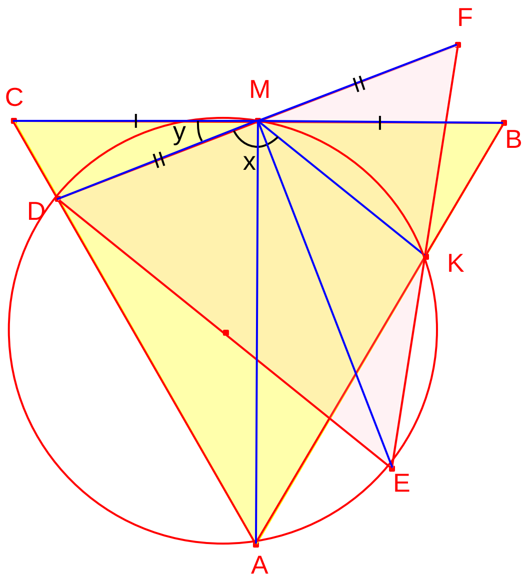
[CFE]=[GCE]/2=S/2

[EFG]/[HBG]=3/2

5382.- La figura està formada per dos triangles equilàters.
Calculeu la mesura de l’angle x



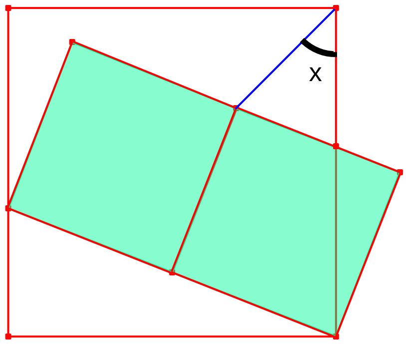
Solució:



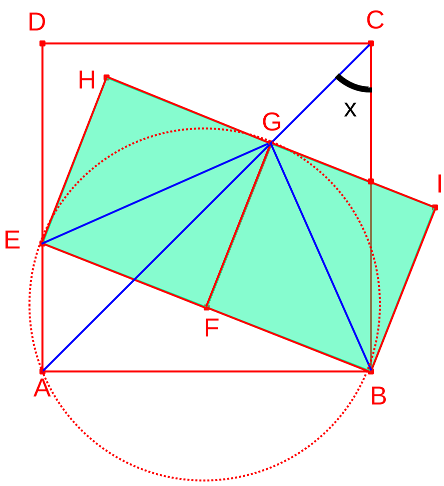
angleADE=angleCMD=y
angleAKE=angleCMD=y
angleAME=angleCMD=y

AEKMD cíclic
x=180º-angleDAK=120º

5383.- La figura està formada per tres quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleEGB=90º

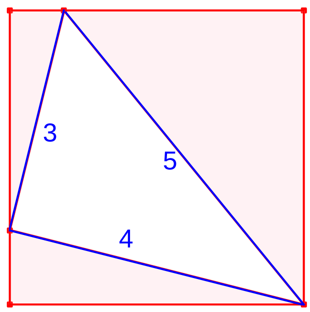
ABGE cíclic

angleEAG=angleEBG=45º

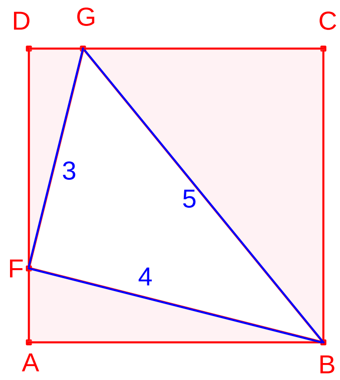
G pertany a la diagonal AC

x=45º

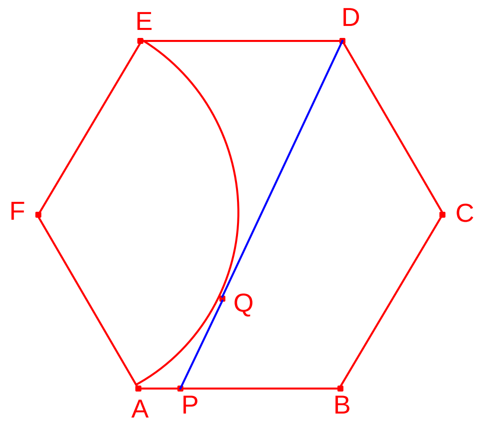
5384.- La figura està formada per un quadrat que conté un triangle de costats 3, 4, 5.
Calculeu l'àrea ombrejada.



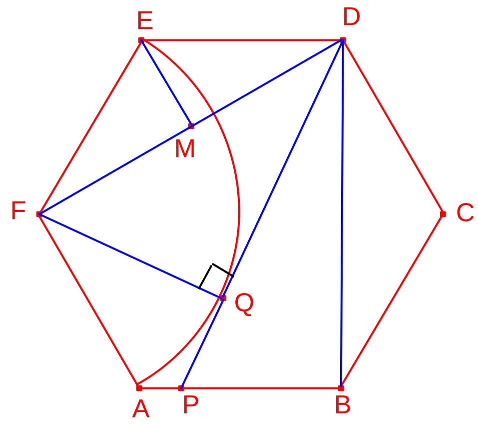
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el triangle rectangle pitagòric $\overset{\Delta}{GFB}$ de costats 3, 4, 5
Els triangles rectangles$\overset{\Delta}{DFG}, \overset{\Delta}{FAB}$ són semblants.
Siga $\overline{AF} = 4k, \overline{DG} = 3k$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DFG}, \overset{\Delta}{FAB}$
$9 = 9k^2 + (c - 4k)^2$
$16 = 16k^2 + c^2$
Resolent el sistema:
$k = \frac{\sqrt{17}}{17}, c = \frac{16\sqrt{17}}{17}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = S_{ABCD} - S_{GFB} = c^2 - 6 = \frac{154}{17}$



5385.- Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siga l'arc de centre F que passa per A i E
Siga el segment $\overline{PD}$ tangent a l'arc en Q.
Calculeu la mesura del segment $\overline{PD}$



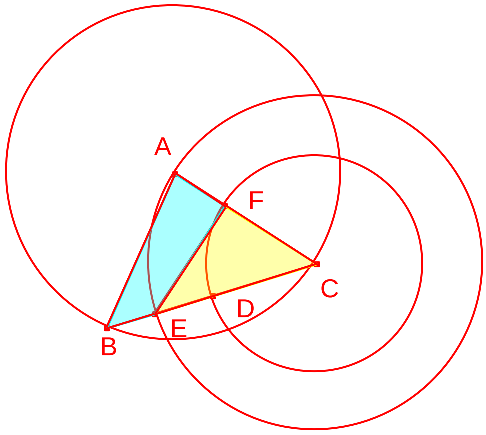
Solució:
Siga M el punt mig del segment $\overline{DF}$
$\overline{EM} = 5, \overline{DM} = 5\sqrt{3}, \overline{DF} = \overline{BD} = 10\sqrt{5}$



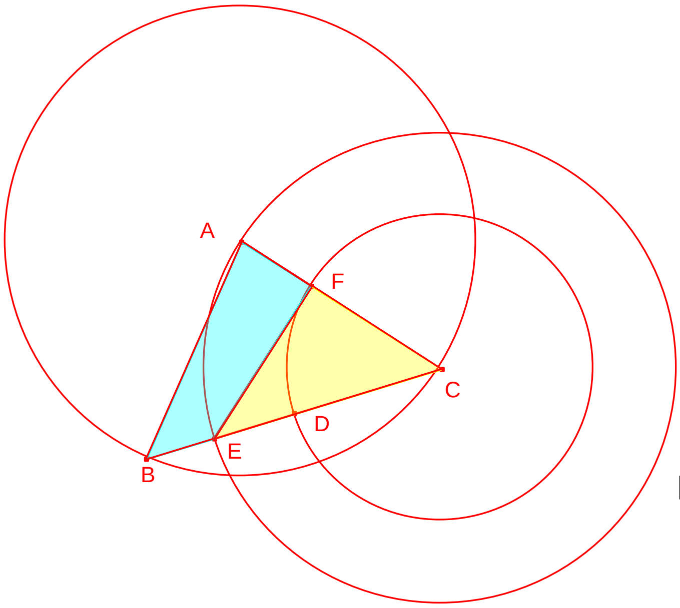
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FQD}$:
$\overline{DQ} = 10\sqrt{2}$
Siga $\alpha = \angle FDQ$
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
$\angle PDB = 60° - \alpha$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PDB}$:
$\frac{10\sqrt{3}}{\overline{PD}} = \cos(60° - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$
$\overline{PD} = 60(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

5386.- La figura està formada per tres circumferències i un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
D és el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Proveu que el quadrilàter $ABEF$ i el triangle $\overset{\Delta}{ECF}$ tenen el mateix perímetre i la mateixa àrea.



Solució:



AB=AC=c
BC=a
EF=d
CF=a/2

AE=c
BE=a-c

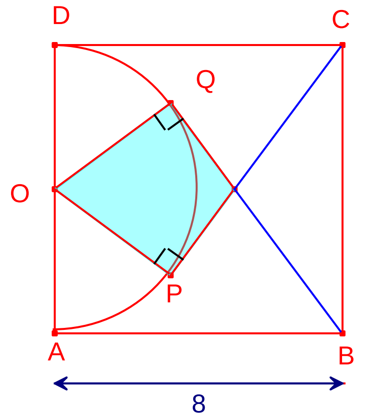
AF=c-a/2

Perim.CFE=a/2+c+d
Perim.BEFA=a-c+d+c-a/2+c=a/2+c+d

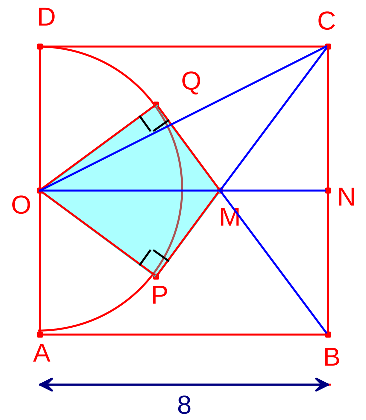
[CFE]=(1/2)(a/2)·c·sin C=(1/2)·[ABC]

[CFE]=[BEFA]

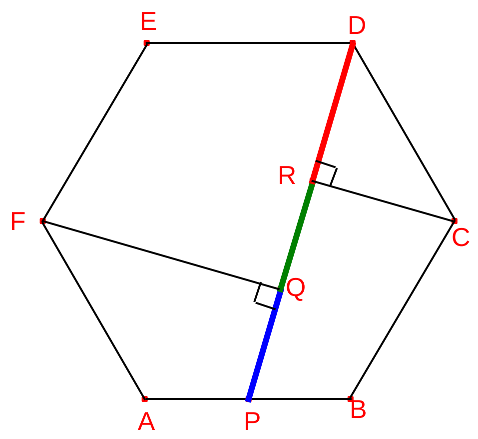
5387.- La figura està formada per un quadrat $ABCD$ de costat 8, una semicircumferència de diàmetre $\overline{AD}$ i dos segments tangents a la semicircumferència.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



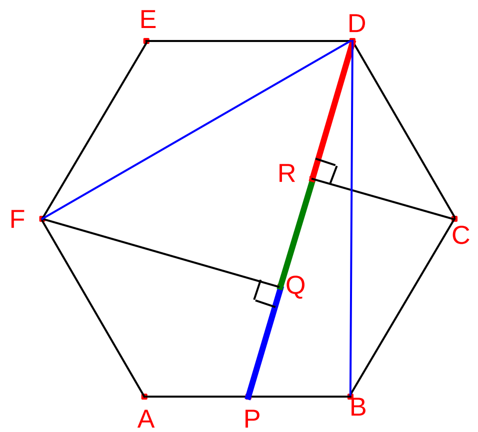
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 8$
$\overline{CP} = \overline{CD} = 8$
$\overline{OC} = 4\sqrt{5}$
Siga $\alpha = \angle OCD = \angle OCP$
$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$
$\angle MCN = 90° - 2\alpha$
$\frac{4}{\overline{MN}} = \tan 2\alpha = \frac{4}{3}$
$\overline{MN} = 3$
$\overline{OM} = 8 - 3 = 5, \overline{OQ} = 4$
$\overline{QM} = 3$
L'àrea del quadrilàter ombrejat és:
$S_{OPMQ} = \overline{OQ} \cdot \overline{QM} = 4 \cdot 3 = 12$



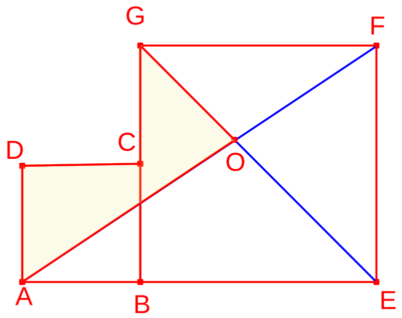
5388.- La figura està formada per un hexàgon regular $ABCDEF$.
P és el punt mig del costat $\overline{AB}$
Calculeu la proporció dels segments $\overline{PQ} : \overline{QR} : \overline{RD}$



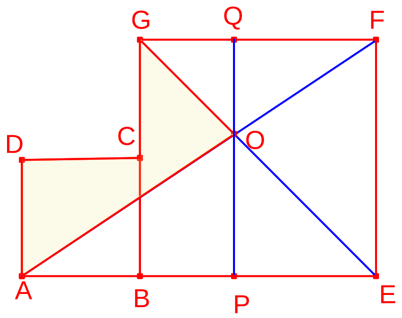
Solució:
Siga $\overline{AB} = 2$
$\overline{BD} = \overline{DF} = 2\sqrt{3}$
$\overline{DP} = \sqrt{13}$
Siga $\alpha = \angle PDB$
$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$
$\angle RDC = 30° + \alpha$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DRC}$:
$\frac{\overline{DR}}{2} = \cos(30° + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}$
$\overline{DR} = \frac{5}{\sqrt{13}}$
$\angle FDQ = 60° - \alpha$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FQD}$:
$\frac{\overline{DQ}}{2\sqrt{3}} = \cos(60° - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$
$\overline{DQ} = \frac{9}{\sqrt{13}}$
$\overline{QR} = \overline{DQ} - \overline{DR} = \frac{4}{\sqrt{13}}$
$\overline{PQ} = \overline{DP} - \overline{DQ} = \frac{4}{\sqrt{13}}$
$\overline{PQ} : \overline{QR} : \overline{RD} = 4 : 4 : 5$



5389.- La figura està formada pel quadrat $ABCD$ de costat 20 i el quadrat $BEFG$ de costat 40. Calculeu l'àrea de la figura ombrejada.



Solució:



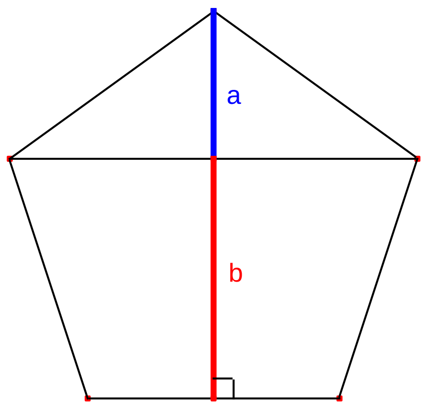
Els triangles $\overset{\Delta}{GFO}, \overset{\Delta}{EAO}$ són semblants i de raó $60 : 40 = 3 : 2$

$\overline{OP} = \frac{3}{5} \cdot \overline{EF} = 24$

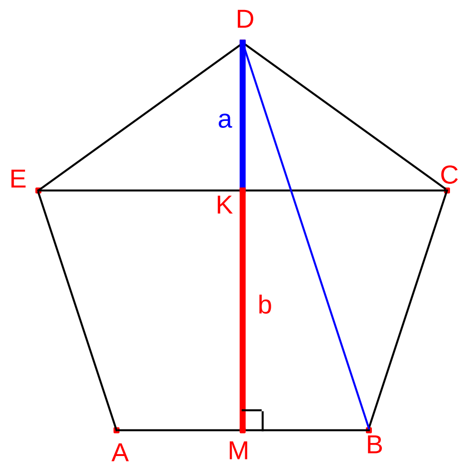
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = S_{ABCD} + S_{BEG} - S_{AEO} = 400 + 800 - \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 24 = 480$$

5390.- La figura està formada per un pentàgon regular, una diagonal i la mediatriu a un costat. Calculeu la proporció dels segments $b : a$



Solució 1:



Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$$\overline{CE} = \overline{BD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

$$\overline{CK} = \frac{\Phi}{2}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKC}$:

$a = \overline{DK} = \sin 36°$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMB}$:

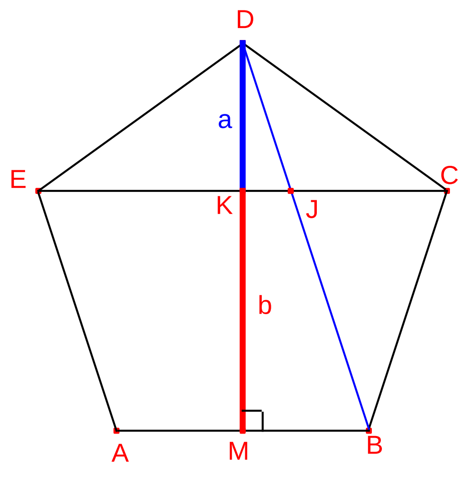
$a + b = \Phi \cdot \sin 72°$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{\Phi \cdot \sin 72°}{\sin 36°} = \frac{2\Phi \cdot \sin 36° \cdot \cos 36°}{\sin 36°} = 2\Phi \cdot \cos 36° = 2\Phi \cdot \frac{\Phi}{2} = \Phi^2$$

$$\frac{b}{a} = \Phi^2 - 1 = \Phi$$

Solució 2:



Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga J la intersecció de les diagonals $\overline{DJ} = \overline{CJ}$

$$\overline{DJ} = \overline{CJ} = \frac{1}{\Phi}, \overline{BJ} = \overline{BC}$$

$$\frac{b}{\overline{BJ}} = \frac{a}{\overline{DJ}}$$

$$\frac{b}{a} = \Phi$$