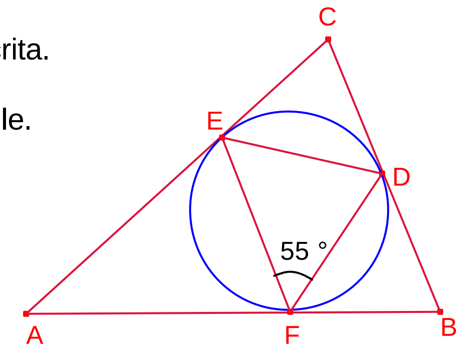
Problemes de Geometria per a l'ESO 54

531.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ dibuixem la circumferència inscrita.
Siguen D, E, F els punts de tangència.
Si $\angle DFE = 55º$, calculeu la mesura de l'angle C del triangle.



Solució:
L'angle C és exterior a la circumferència inscrita al triangle, a més a més els costats dels angles són tangents a la circumferència.
La mesura d'un angle exterior a una circumferència mesura la semidiferència dels arcs que abraça.

L'angle $\angle EFD = 55º$ és inscrit a la circumferència.
L'arc inscrit de la circumferència mesura la meitat de l'arc que abraça.

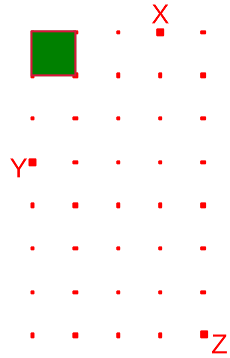
$\overset{\frown}{DE} = 2\angle DFE = 110º$.

$\overset{\frown}{DFE} = 360º - \overset{\frown}{DE} = 250º$.
Aleshores:

$$C = \frac{\overset{\frown}{DFE} - \overset{\frown}{DE}}{2} = 70º .$$

Generalització:
Si $\angle DFE = \alpha$.
$C = 180º - 2\alpha$.

532.- L'àrea del quadrat de la quadrícula és 1.
Calculeu l'àrea del cercle que passa pels punts X, Y, Z.



Solució:
Els costats quadrats de la quadrícula mesuren 1.

$\overline{XY} = 3\sqrt{2}$.

$\overline{YZ} = 4\sqrt{2}$.

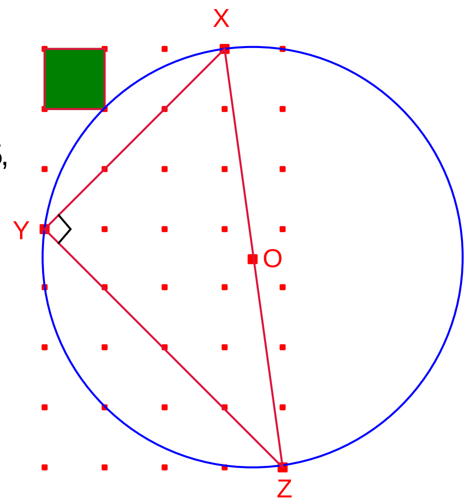
$\overline{XZ} = 5\sqrt{2}$.

Aleshores, els costats del triangle són proporcionals a 3, 4, 5,
aleshores $\overset{\Delta}{XYZ}$ és un triangle rectangle $Y = 90º$.
El circumcentre del triangle rectangle està en el punt mig de la hipotenusa.
El radi de la circumferència circumscrita és:

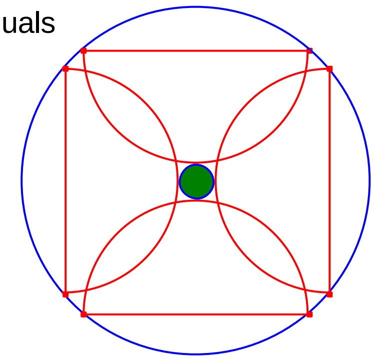
$\overline{OX} = \frac{1}{2}\overline{XZ} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

L'àrea del cercle circumscrit al triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$ és:

$S = \pi\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{2}$.



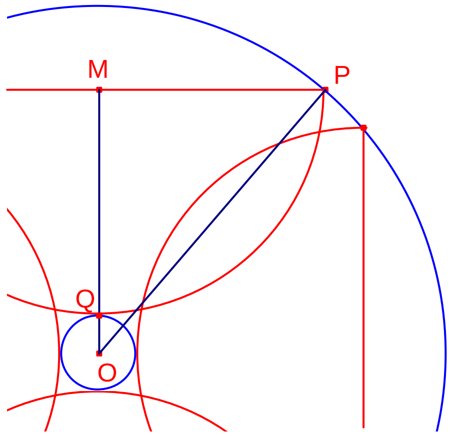
533.- En la figura hi ha dos circumferències i 4 semicercles iguals simètrics respecte el centre del cercle tangents a la circumferència menuda i els punts que formen els diàmetres pertanyen a la circumferència gran.
Si l'àrea del cercle ombrejat és 4 i l'àrea de cada semicercle és 18, determineu l'àrea del cercle gran.



Solució:
Siga r el radi de la circumferència menuda.

$4 = \pi r^2$. Aleshores:

$$r^2 = \frac{4}{\pi} \qquad (1)$$



Siga s el radi dels semicercles.

$18 = \frac{1}{2}\pi s^2$. Aleshores:

$$s^2 = \frac{36}{\pi} \qquad (2)$$

Multiplicant les expressions (1) i (2):

$$r^2 s^2 = \frac{144}{\pi^2} \text{ -}$$

$$rs = \frac{12}{\pi} \qquad (3)$$

Siga R el radi de la circumferència gran.
Siga Q el punt de tangència de la circumferència menuda i un semicercle.
Siga M el centre del semicercle i P un dels extrems del diàmetre del semicercle.

$\overline{OM} = r + s$, $\overline{MP} = s$, $\overline{OP} = R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:

$$R^2 = (r+s)^2 + s^2$$

$$R^2 = r^2 + 2s^2 + 2rs \qquad (4)$$

Substituint les expressions (1) (2) (3) en l'expressió (4):

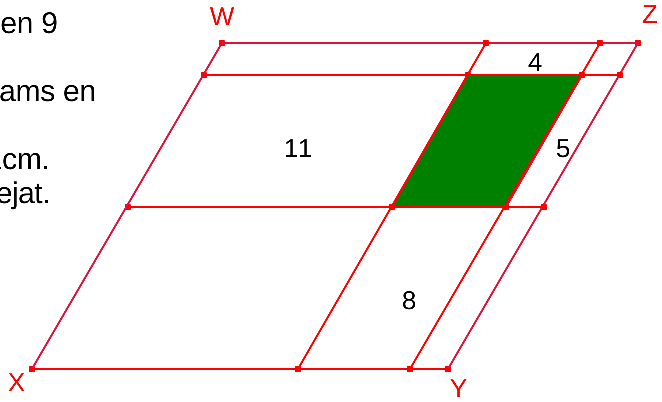
$$R^2 = \frac{4}{\pi} + 2\frac{36}{\pi} + 2\frac{12}{\pi}.$$

$$R^2 = \frac{100}{\pi}.$$

L'àrea del cercle gran és:

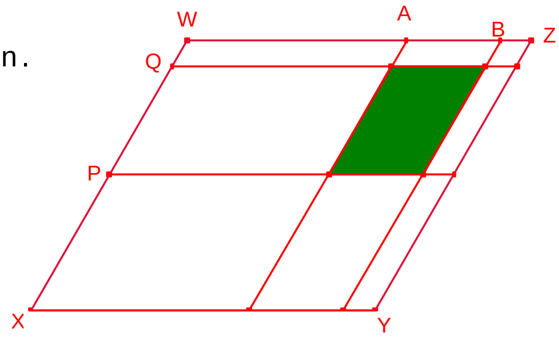
$$S = \pi R^2 = \pi\frac{100}{\pi} = 100.$$

534.- El paral·lelogram de la figura està dividit en 9 paral·lelograms més menuts.
Es donen els perímetres de 4 dels paral·lelograms en centímetres.
Si el perímetre de paral·lelogram XYZW és 21cm.
Calculeu el perímetre del paral·lelogram ombrejat.



Solució:

Siga $\overline{WA} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{BZ} = c$. $\overline{XP} = k$, $\overline{PQ} = m$, $\overline{QW} = n$.



El perímetre del paral·lelogram ombrejat és:
$2(b+m)$.

$2(a+b+c+k+m+n) = 21$ (1)

$2(b+n) = 4$ (2)

$2(a+m) = 11$ (3)

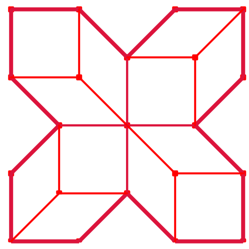
$2(b+k) = 8$ (4)

$2(c+m) = 5$ (5)

Sumant les expressions (2), (3), (4), (5):
$2(2(b+m)+a+c+k+n) = 28$ (6)

Restant les expressions (6) i (1):
$2(b+m) = 7$.

535.- En la figura hi ha un polígon còncau de 16 costats dividit en quatre quadrats iguals i 8 rombes iguals. La diagonal major de cada rombe és D i l'angle menor de cada rombe és 45º. Determineu l'àrea del polígon de 16 costats.
KöMaL, K336.

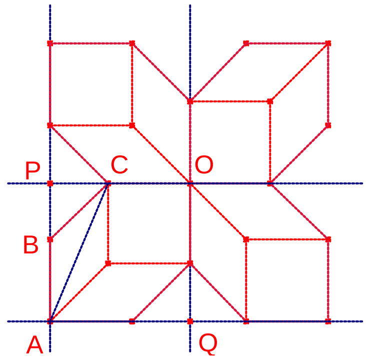


Solució:
Tots els costats del polígon de 16 costats són iguals.
Siga $c=\overline{AB}=\overline{BC}$ costats del polígon.
Per hipòtesi $\overline{AC}=D$.
Siga P la projecció de C sobre la recta AB.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BPC}$:

$$\overline{BP}=\overline{PC}=\frac{\sqrt{2}}{2}c\,.$$

$$\overline{AP}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}c\,.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$

$$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2=D^2.$$

Resolent l'equació en la incògnita c:

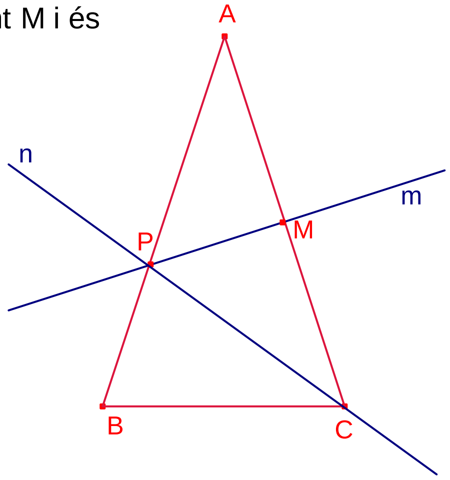
$$c=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}D\,.$$

L'àrea del polígon de 16 costats és igual a 4 vegades l'àrea del quadrat de costat $\overline{AP}$, menys 2 vegades l'àrea del quadrat de costat $\overline{BC}$.

$$S=4\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}c\right)^2-2c^2=4\left(1+\sqrt{2}\right)c^2=4\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{4-2\sqrt{2}}{4}D^2=2\sqrt{2}\cdot D^2\,.$$

536.- En un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB}=\overline{AC}$ es dibuixen la mediatriu m al costat $\overline{AC}$ i la bisectriu n de l'angle C.
Si m, n i el costat $\overline{AB}$ es tallen en un únic punt, quant mesura l'angle A.

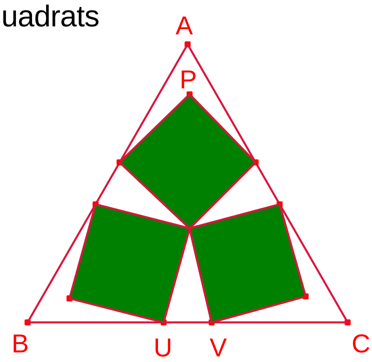
Solució:
Siga P el punt d'intersecció de m, n i el costat $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}$. La mediatriu m passa pel punt M i és perpendicular al costat $\overline{AC}$.



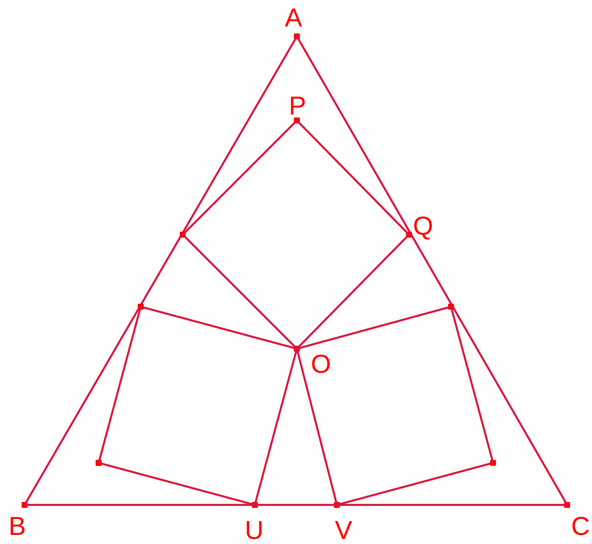
Els triangles $\overset{\Delta}{CMP}$, $\overset{\Delta}{AMP}$ són iguals ja que tenen dos catets corresponents iguals.
Aleshores, $\angle PCM=\angle PAM$.

Siga $C=2\alpha$. $B=C=2\alpha$.
Aleshores, $A=180^{o}-(B+C)=180^{o}-4\alpha$.
Per ser n bisectriu, $\angle PCA=\alpha$.
Aleshores, $\angle PCA=\angle PAM=A=\alpha$.
Aleshores, $180^{o}-4\alpha=\alpha$.
Resolent l'equació:
$\alpha=36^{o}$.

537.- En el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ s'han dibuixat tres quadrats iguals (veure figura).
Demostreu que $\overline{AP}=\overline{UV}$.



Solució:
$\angle UOV=30^{o}$, $\angle OUV=75^{o}$.
$\angle PAC=30^{o}$, $\angle PQA=15^{o}$.
Siga $c=\overline{OU}=\overline{PQ}$ costats dels quadrats.



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{OUV}$:

$$\frac{\overline{UV}}{\sin 30^{o}}=\frac{c}{\sin 75^{o}}.$$

$$\overline{UV}=\frac{\sin 30^{o}}{\sin 75^{o}}c=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}}c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

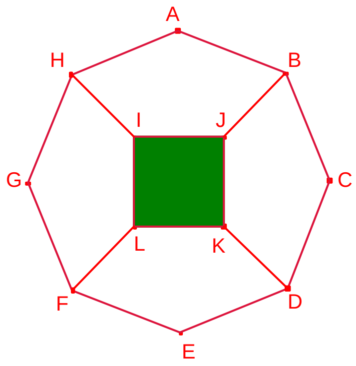
$$\frac{\overline{AP}}{\sin 15^{o}}=\frac{c}{\sin 30^{o}}.$$

$$\overline{AP}=\frac{\sin 15^{o}}{\sin 30^{o}}c=\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c.$$

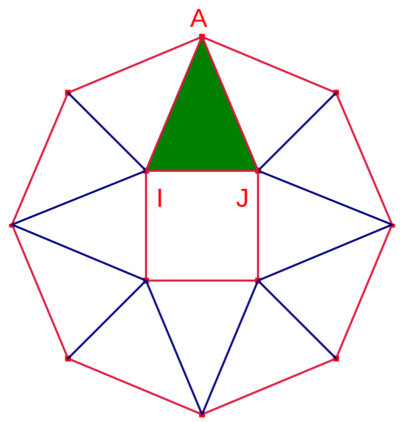
Aleshores, $\overline{AP}=\overline{UV}$.

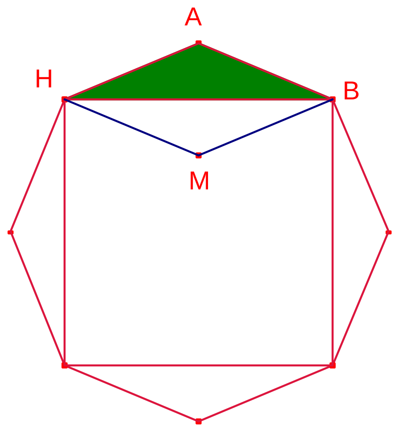
538.- En la figura ABCDEFGH és un octògon regular i
$\overline{HI} = \overline{BJ} = \overline{DK} = \overline{LF} =$ costat del quadrat IJKL.

Calculeu $\dfrac{S_{ABCDEFGH} - S_{IJKL}}{S_{ABCDEFGH} - S_{BDFH}}$.



Solució:





Siga M el simètric del punt A respecte de $\overline{HB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{IJA}$, $\overset{\Delta}{AMH}$ són iguals.
ABMH és un rombe per tant:

Les àrees dels triangles, $\overset{\Delta}{AMH}$, $\overset{\Delta}{HBA}$ són iguals, aleshores:

Les àrees del triangle $\overset{\Delta}{IJA}$, $\overset{\Delta}{HBA}$ són iguals.

$S_{ABCDEFGH} - S_{IJKL} = 12 \cdot S_{IJA}$.

$S_{ABCDEFGH} - S_{BDFH} = 4 \cdot S_{HBA} = 4 \cdot S_{IJA}$.

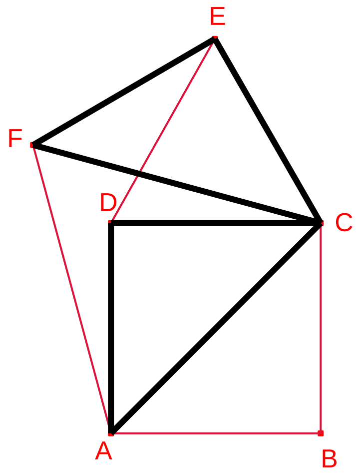
Aleshores, $\dfrac{S_{ABCDEFGH} - S_{IJKL}}{S_{ABCDEFGH} - S_{BDFH}} = \dfrac{12 \cdot S_{IJA}}{4 \cdot S_{IJA}} = 3$.

539.- Siga ABCD un quadrat de costat 1.

Siga $\overset{\Delta}{ACF}$ un triangle equilàter amb el punt D en el seu interior.

Siga $\overset{\Delta}{CDE}$ un triangle equilàter exterior al quadrat ABCD.

Calculeu la mesura del segment $\overline{FE}$.

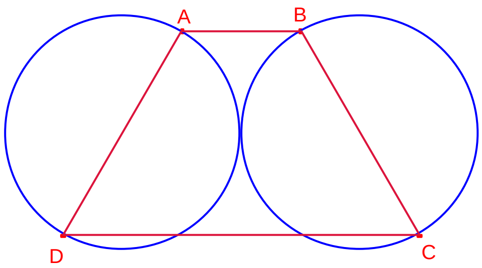


Solució:
F és el resultat de girar el punt A amb centre C -60º.
E és el resultat de girar el punt D amb centre C -60º.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{FEC}$ són iguals.

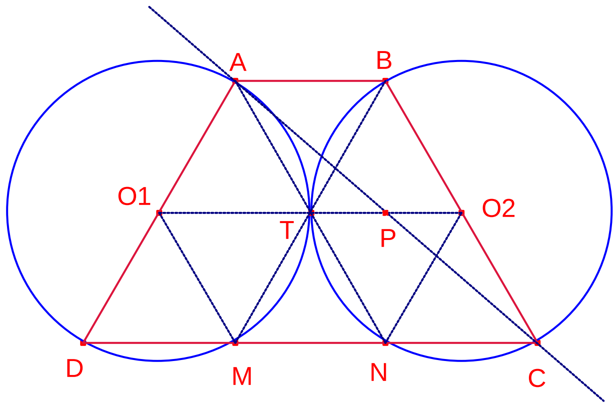
Aleshores $\overline{FE} = \overline{AD} = 1$.

540.- En la figura ABCD és un trapezi isòsceles i dues circumferències tangents tal que $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ són diàmetres i $\overline{CD} = 3 \cdot \overline{AB}$. Si el radi de les circumferències és 2,
a) Calculeu l'àrea del trapezi.
b) Determineu la distància entre el punt de tangència de les circumferències i la recta AC.



Solució:
Siguen O_1, O_2 els centres de les dues circumferències. $\overline{O_1O_2}$ és paral·lela mitjana del trapezi. Siga T el punt de tangència de les circumferències.
$\overline{O_1T} = \overline{O_2T} = 2$. $\overline{O_1O_2} = 4$
Siguen M, N els punts de tall de cadascuna de les circumferències i el costat $\overline{CD}$.
$\angle AMD = 90^\circ$ ja que $\overline{AD}$ és un diàmetre.
Anàlogament, $\angle AMD = 90^\circ$.
Com que $\overline{CD} = 3 \cdot \overline{AB}$, Aleshores:
$\overline{DM} = \overline{MN} = \overline{NC} = \overline{AB}$.
Per ser $\overline{O_1O_2}$ paral·lela mitjana del trapezi

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = 2\overline{AB}.$$



Aleshores, $\overline{AB} = 2$.
Aleshores, els angles del trapezi ABCD és de 60º i 120º.
El trapezi ABCD és pot dividir en 8 triangles equilàters de costat $\overline{AB} = 2$.
Aleshores l'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = 8 \cdot S_{ABT} = 8 \cdot \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}.$$

Siga d la distància del punt T a la recta AC.
ABCN és un paral·lelogram la diagonal $\overline{AC}$ talla la paral·lela mitjana $\overline{TO_2}$ en el punt mig. Siga P el punt mig del segment $\overline{TO_2}$.
$\overline{TP} = 1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMA}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}. \quad \overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \sqrt{3}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ATP}$ és:

$$S_{ATP} = \frac{1}{2} S_{ABT} = \frac{1}{2}\frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

$$S_{ATP} = \frac{\overline{AP} \cdot d}{2} \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\overline{AP} = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{7} \qquad (3)$$

De les expressions (1) (2) (3):

$\sqrt{7} d = \sqrt{3}$. Aleshores: $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.