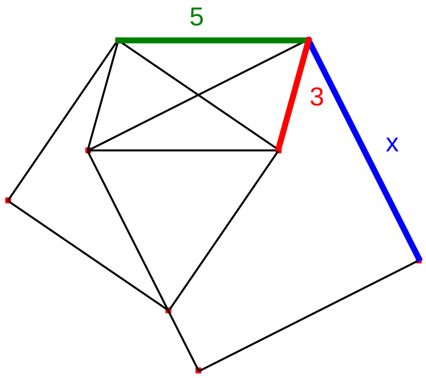
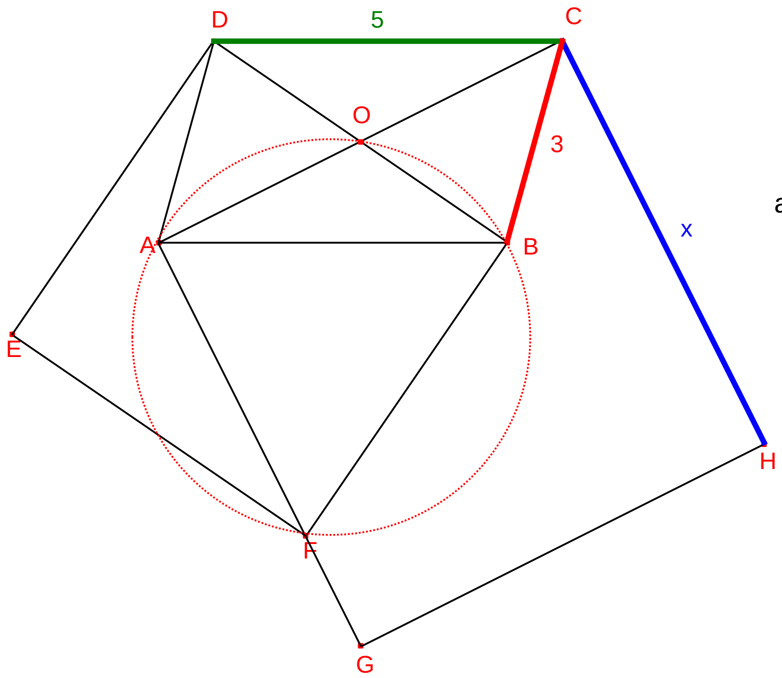
Problemes de Geometria per a l'ESO 541

5401.- La figura està formada per un paral·lelogram de costats 5, 3 i dos quadrats. Calculeu la mesura del costat x



Solució:



BD=c

AFBD cíclic

OB=c/2

angleOFB=angleOAB=a

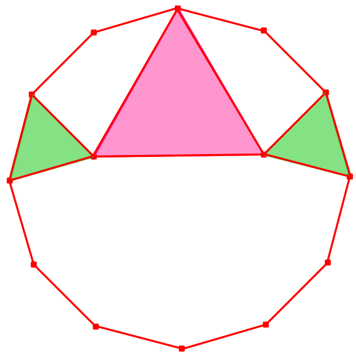
cos a = 2/sqrt(5)

teorema cosinus ABC

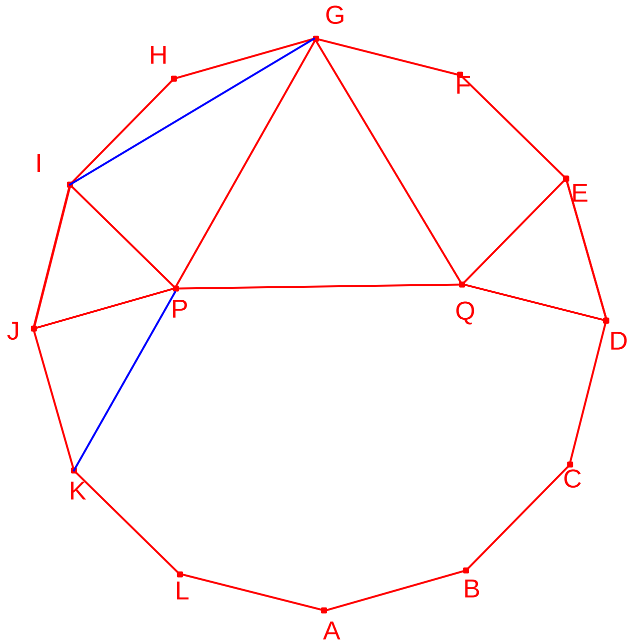
9=25+x²-4·sqrt(5)·x

x=2(1+sqrt(5))

5402.- La figura està formada per un dodecàgon regular i tres triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea morada i l'àrea verda.



Solució:



AB=1

angleKJP=90º

angleJKP=angleJPK=45º

angleJKG=45º

K, P, G alineats

angleHGP=45º

anglePGQ=60º

PQG equilàter

angleIGP=30º

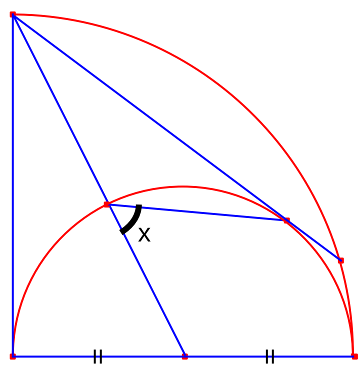
angleGIP=90º-15º=75º

IG=GP

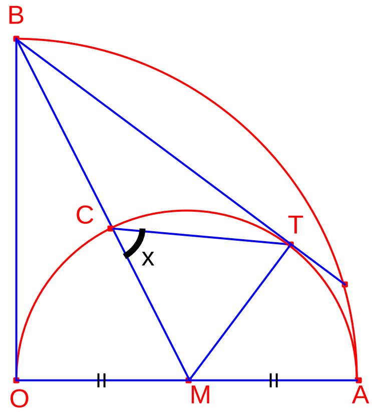
GI²=2+sqrt(3)

[morat/[verd]=GP²/(2·1²)=(2+sqrt(3))/2

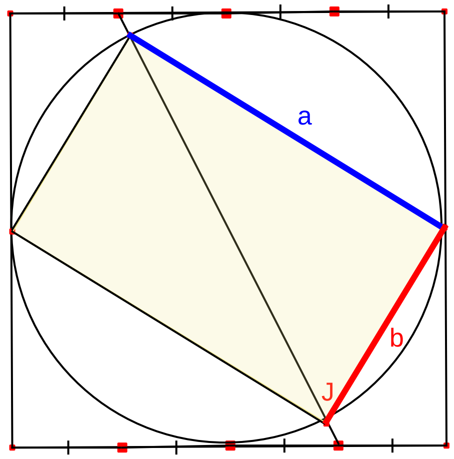
5403.- La figura està formada per un quadrant i una semicircumferència.
Calculeu $\tan x$



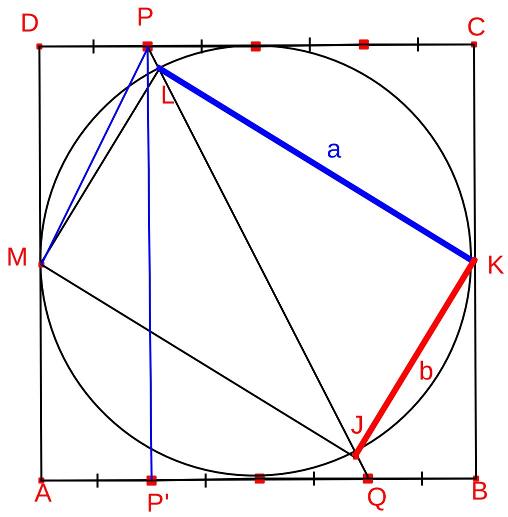
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 2$
Siga $\alpha = \angle OMB = \angle TMB$
$\overline{MC} = \overline{MT} = 1$
$2x + \alpha = 180°$
$x = 90° - \frac{\alpha}{2}$
$\tan\alpha = 2 = \frac{2 \cdot \tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$
$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$
$\tan x = \operatorname{ctan}\frac{\alpha}{2} = \Phi$



5404.- La figura està formada per un quadrat amb els costats oposats dividits en quatre parts iguals.
La circumferència inscrita al quadrat i un rectangle inscrit a la circumferència de costats de longituds a, b.
Calculeu la proporció dels costats $a : b$

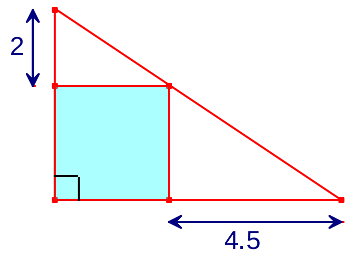


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siga el rectangle $JKLM$ de costats $\overline{JK} = b, \overline{KL} = a$
Siga $\overline{PL} = \overline{QJ} = x, \overline{JL} = 4$
$a^2 + b^2 = 16$
$\overline{PQ} = 2\sqrt{5}$
Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència.
$x(4 + x) = 3^2$
$x = \sqrt{5} - 2$
$\overline{PJ} = \overline{PQ} - x = 2 + \sqrt{5}$
Siga $\beta = \angle DMP = \angle P'PQ$
$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$\angle MPQ = 2\beta$
$\cos 2\beta = \frac{3}{5}$



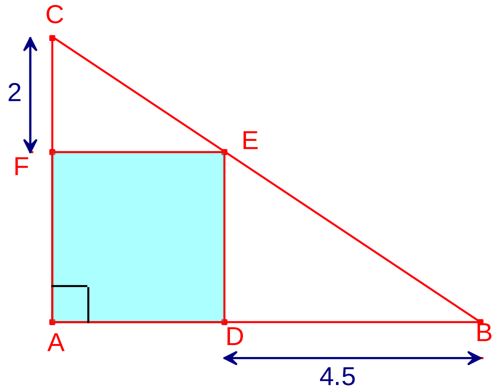
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PMJ}$:
$a^2 = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + 5 - 2\left(2 + \sqrt{5}\right)\sqrt{5} \cdot \frac{3}{5}$
$a^2 = \frac{40 + 8\sqrt{5}}{5}$
$b^2 = 16 - a^2 = \frac{40 - 8\sqrt{5}}{5}$
$\frac{a^2}{b^2} = \frac{40 + 8\sqrt{5}}{40 - 8\sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \Phi^2$
$\frac{a}{b} = \Phi$

5405.- La figura està formada per un triangle rectangle que conté un quadrat inscrit.
Calculeu l'àrea del quadrat.

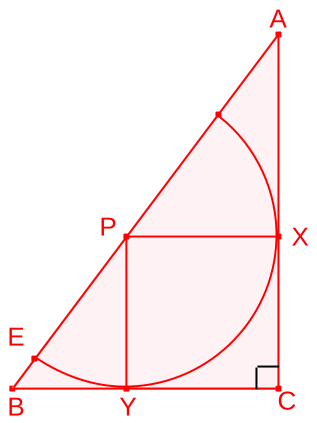


Solució:

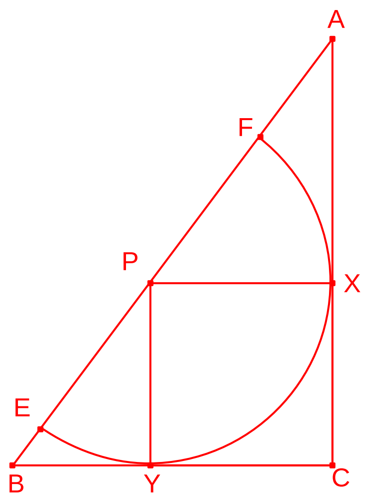
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga el triangle $ADEF$ de costat $\overline{AD} = c$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC},\ \overset{\Delta}{FEC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{2}{c} = \frac{2 + c}{c + \frac{9}{2}}$$
Simplificant:
$c^2 = 9$, àrea del quadrat $ADEF$.



5406.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$
Siga P un punt de la hipotenusa $\overline{AB}$ tal que $PXCY$ és un quadrat de costat 8.
Amb centre en P es traça una semicircumferència de radi 8 que talla el segment $\overline{BP}$ en E.
Si $\overline{BE} = 2$, determineu l'àrea i el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

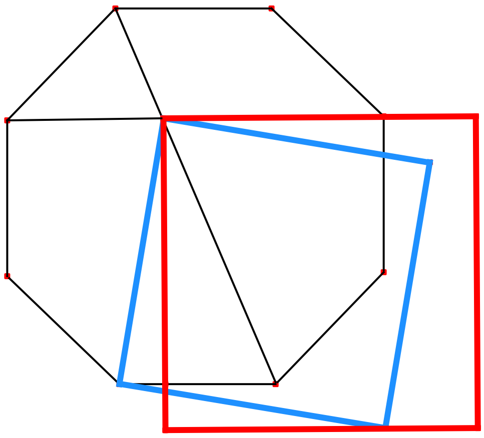


Solució:

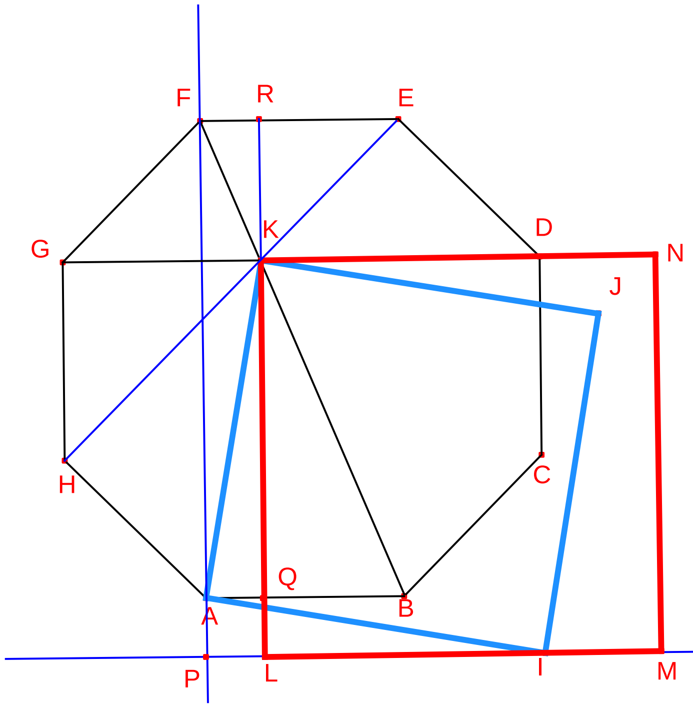


YC=8
BE=2, PE=PF=8
BY=x
Potència de B respecte de la semicircumferència
$2\cdot18=x^2$
x=6
a=BC=6+8=14
AC=b, AB=c
els triangles ABC, PBY semblants
14/6=c/10, 14/6=b/8
b=56/3, c=70/3
perim.ABC=a+b+c=56
[ABC]=ab/2=392/3

5407.- La figura està formada per un octògon regular, dues diagonals i dos quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat blau i el quadrat roig



Solució:



AB=1

AI=c, KL=d

QR=1+sqrt(2), RK=sqrt(2)/2

RE=RK=BQ=sqrt(2)

QK=(2+sqrt(2))/2

AQ=(2-sqrt(2))/2

teorema Pitàgores AQK

$c^2=3$

Els triangles KQA, IPQ iguals

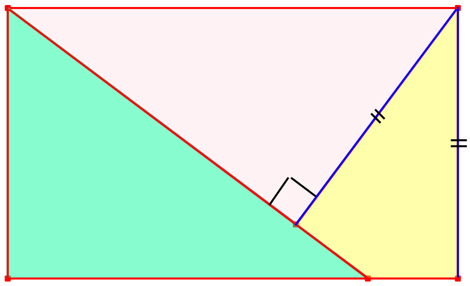
AQ=AP=QL

d=KQ+AQ=2

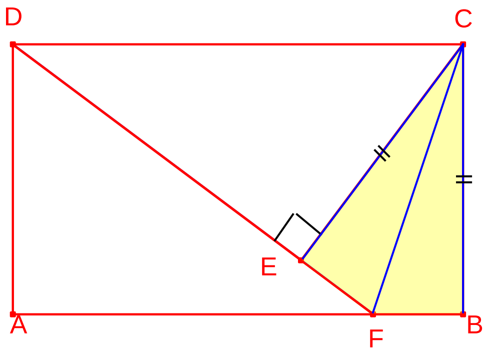
$d^2=4$

[AIJK]/[KLMN]=$c^2/d^2=3/4$

5408.- En la figura, l'àrea del quadrilàter groc és la cinquena part de l'àrea del rectangle. Calculeu la proporció entre els costats del rectangle.



Solució:



AB=a, BC=b

EF=BF=x

[BCEF]=bx=ab/5

x=a/5

Els triangles DAF, CEF són siguals

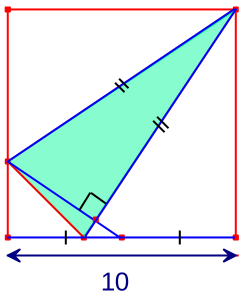
DE=AF=(4/5)a

teorema Pitàgores DEC

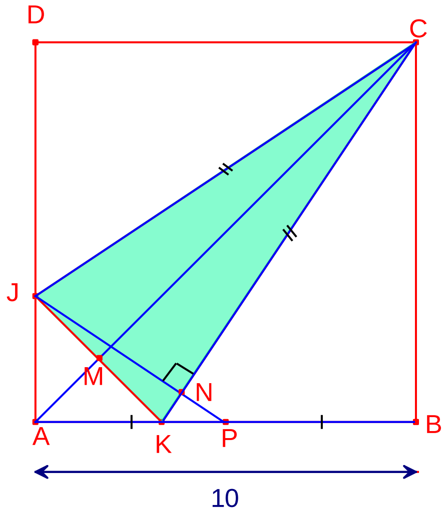
$a^2=b^2+(16/25)a^2$

a/b=5/3

5409.- La figura està formada per un quadrat de costat 10.
Calculeu l'àrea del triangle isòsceles ombrejat.



Solució:



AC=10·sqrt(2)

AK=AJ=x

AM=MK=x·sqrt(2)/2

CM=(20-x)(sqrt(2)/2)

[JKC]=x(10-x/2)

angleMCK = angle NKJ = a

tan a = MK/CM=x/(20-x)

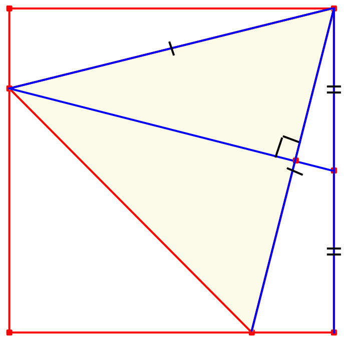
angleAJP=45º+a

tan(45º+a)=5/x =(1+x/(20-x))/(1-x/(20-x))

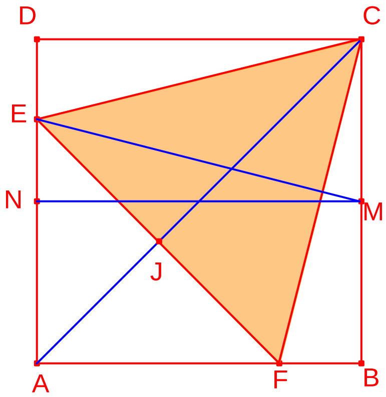
x=10/3

[JKC]=10/3·25/3=250/9

5410.- La figura està formada per un quadrat i un triangle isòsceles.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=2
AF=x

Els triangles FBC, ENM, EDC són iguals

BF=EN=DE=2-x

1=2(2-x)
x=3/2
EF=x·sqrt(2)

CJ=2·sqrt(2)-(x/2)sqrt(2)

[EFC]=x(4-x)/2=15/8

[EFC]/[ABCD]=15/32