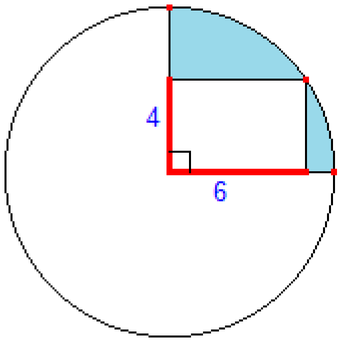
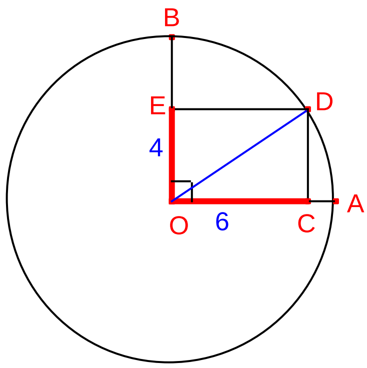
5411.- La figura està formada per una circumferència que conté un rectangle de costats 6 i 3 que té un vèrtex en el centre i el vèrtex oposat en la circumferència.
Calculeu l'àrea ombrejada.

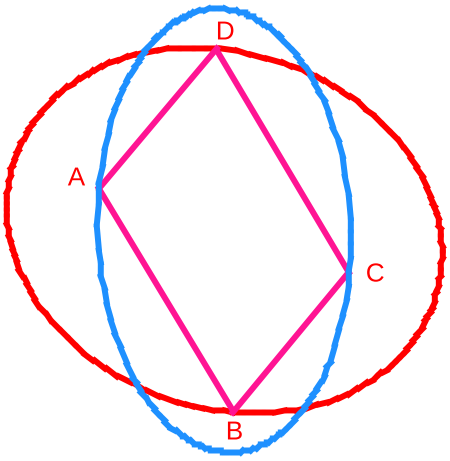


Solució:

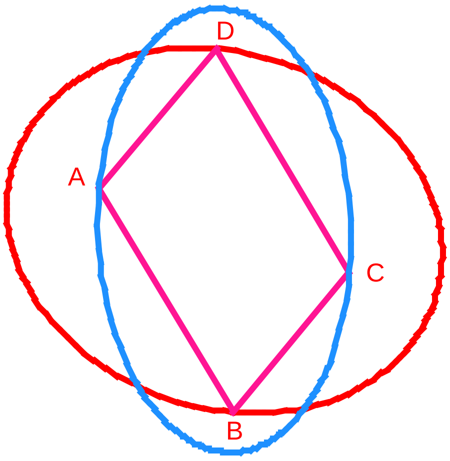
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCD}$:
$\overline{OD} = 2\sqrt{13}$, radi de la circumferència.
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = \frac{\pi}{4}\left(2\sqrt{13}\right)^2 - 6 \cdot 4 = 13\pi - 24 \approx 16.8407$



5412.- La figura està formada per dues el·lipses que passen pels focus una de l'altra.
Proveu que els quatre focus formen un paral·lelogram.



Solució:



AD=a, DC=b, CB=c, BA=d

amb l'el·lipse roja

$a+b=c+d$

amb l'el·lipse blava

$a+d=b+c$

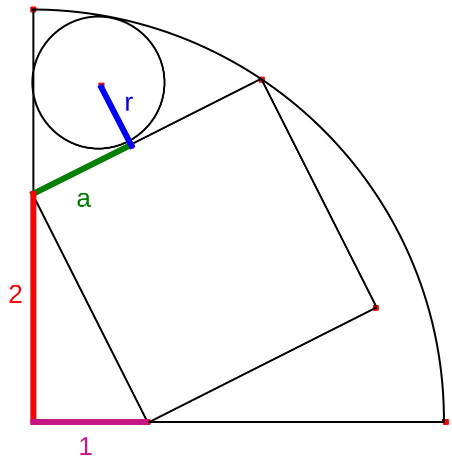
$2a+b+d=2c+b+d$

$a=c$

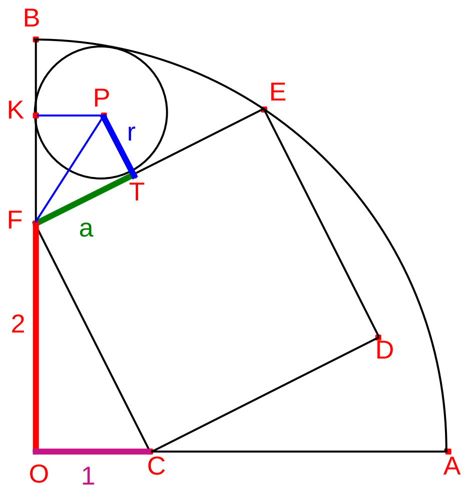
$b=d$

ABCD paral·lelogram

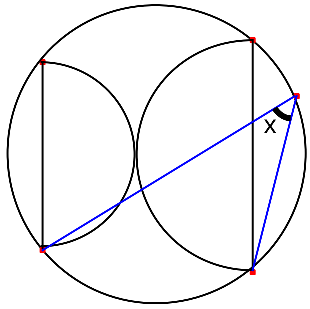
5413.- La figura està formada per un quadrant que conté un quadrat i una circumferència tangent. Calculeu la proporció $a : r$



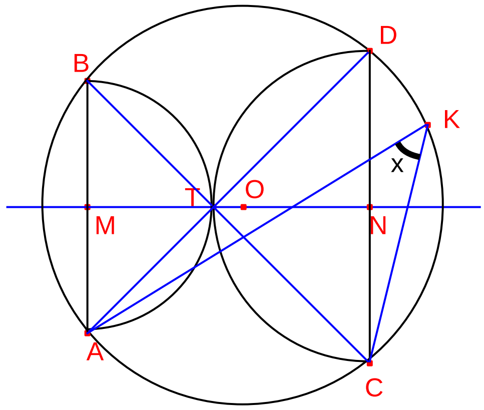
Solució:
Siga el quadrant de centre O.
Siga el quadrat $CDEF$ de costat $\overline{CD} = \sqrt{5}$
Siga $\angle PFT = \angle PFK = \alpha$
Siga $\angle OFC = \beta$
$\beta + 2\alpha = 90°$
$\alpha = 45° - \frac{\beta}{2}$
$\frac{1}{2} = \tan\beta = \frac{2 \cdot \tan\frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\beta}{2}}$
$\tan^2\frac{\beta}{2} + 4 \cdot \tan\frac{\beta}{2} - 1 = 0$
$\tan\frac{\beta}{2} = -2 + \sqrt{5}$
$\frac{r}{a} = \tan\alpha = \tan\left(45° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1 - \left(-2 + \sqrt{5}\right)}{1 + \left(-2 + \sqrt{5}\right)} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$
$\frac{a}{r} = \Phi$



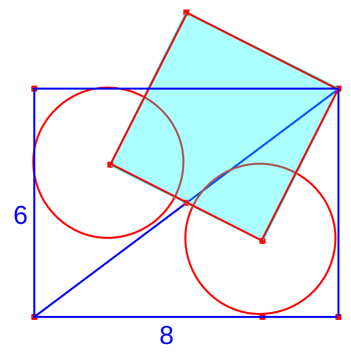
5414.- La figura està formada per una circumferència que conté dues semicircumferències tangents.
Calculeu la mesura de l'angle x



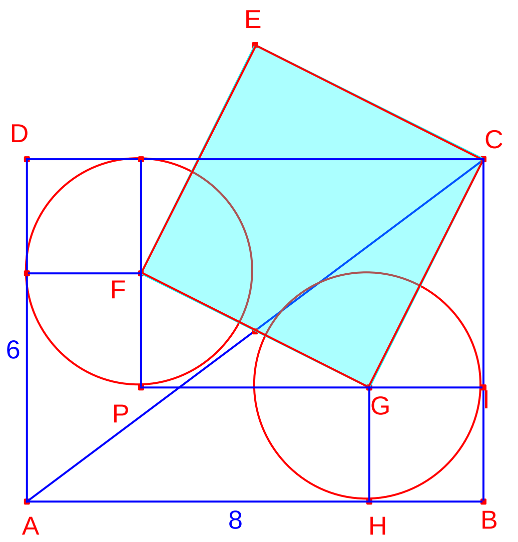
Solució:
Siguen M, N els centres de les semicircumferències de diàmetres $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament
Siga O el centre de la circumferència exterior
$\overline{OM}, \overline{AB}$ són perpendiculars
$\overline{ON}, \overline{CD}$ són perpendiculars
M, N, T, O alineats.
T el punt mig de les dues circumferències.
Els diàmetres $\overline{AB}, \overline{AC}$ són paral·lels
B, T, C alineats
$x = \angle AKC = \angle ABC = 45°$



5415.- La figura està formada per un rectangle de costats 6, 8, una diagonals del rectangles i dues circumferències inscrites.
Calculeu l'àrea del quadrat que té per costat el segment que uneix els dos centres.



Solució:



FG=c

AC=10

GH=GI=r

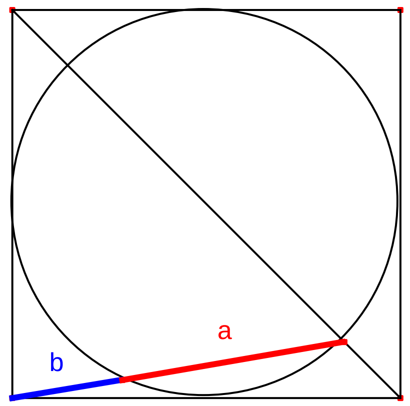
[ABC]=24=(10+8+6)r/2

r=2

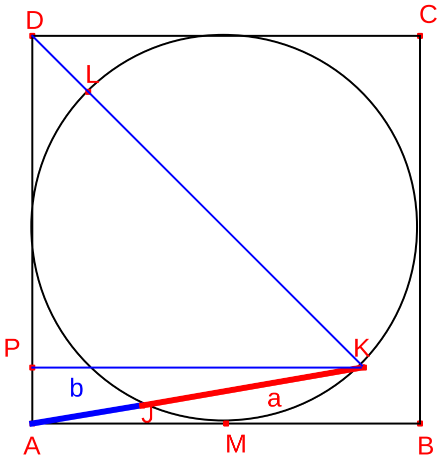
PF=2, PG=4

[CEFG]=$c^2=2^2+4^2=20$

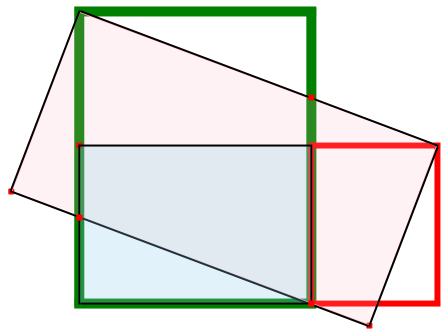
5416.- La figura està formada per un quadrat, una diagonal i la circumferència inscrita al quadrat.
Calculeu la proporció $a : b$



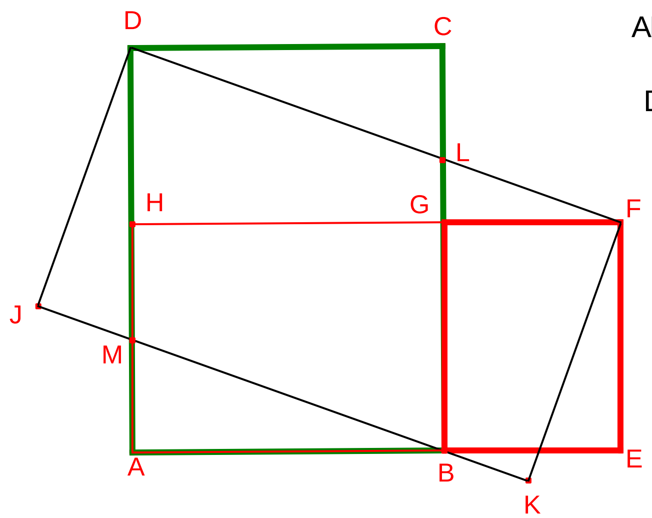
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Aplicant la potència de A respecte de la circumferència:
$b(a+b) = 1$
$\overline{BD} = 2\sqrt{2}, \overline{KL} = 2$
$\overline{BK} = \dfrac{2\sqrt{2}-2}{2}$
$\overline{DK} = 1+\sqrt{2}$
$\overline{PK} = \overline{DK} = (1+\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$
$\overline{AP} = 2 - \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APK}$:
$(a+b)^2 = \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3$
$b\sqrt{3} = 1$
$b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
$a : b = 2 : 1$



5417.- La figura està formada per quatre rectangles.
Els rectangles verd i roig són semblants.
Calculeu la proporció entre l'àrea del rectangle rosa i el rectangle blau.



Solució:



AB=a, AD=b, BE=ka, BG=kb

DJ=c, FL=kd, DL=d= DF=(1+k)d

GL=k(1-k)/(1+k)·b

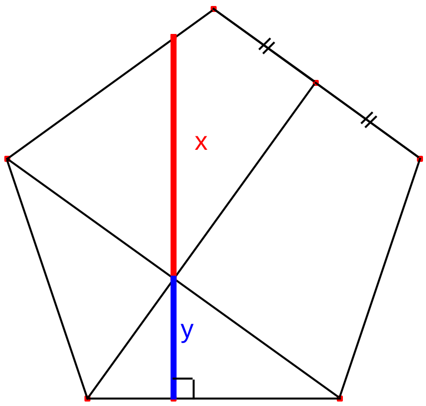
CL=AM=(1-k)/(1+k)b

DM=2k/(1+k)b

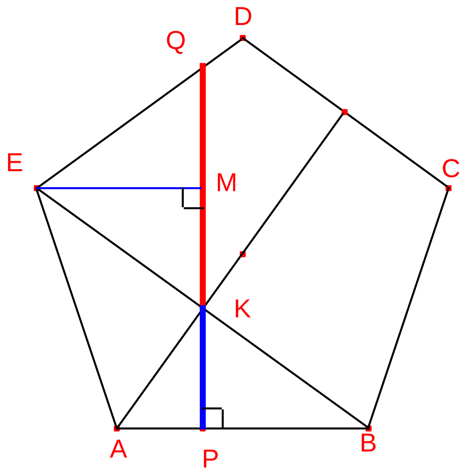
DJM, DCL semblants
c/a=(2k/(1+k)b)
cd=2k/(1+k)ab

[ABGH]=abk
[JKFD]=cd(1+k)=2kab
[JKFD]/[ABGH]=2

5418.- La figura està formada per un pentàgon regular, una diagonal i dos segments.
Calculeu la proporció $x : y$



Solució:



angleKAB=54º

angleKBP=36º

angleKEQ=72º

angleEKG=anglePKB=54º

angleEQK=54º

EKQ isòsceles

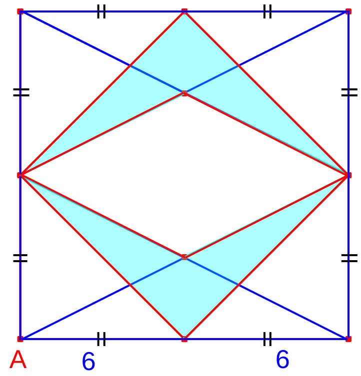
KM=QM

Els triangleEMK, BPK són iguals

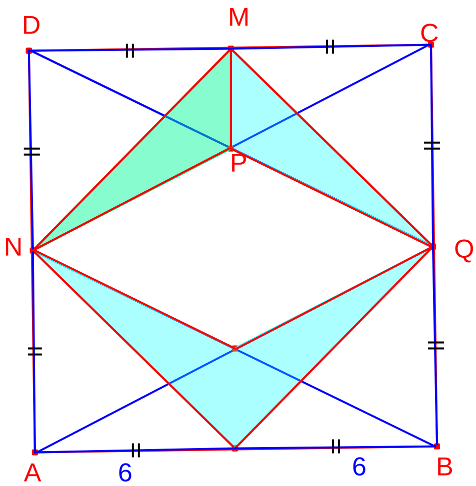
PK=KM

x/y = 2

5419.- La figura està formada per un quadrat que conté dos quadrilàters.
Calculeu l'àrea blava



Solució:



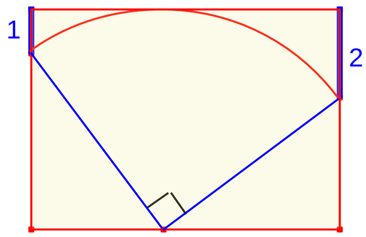
AB=12

DM=6

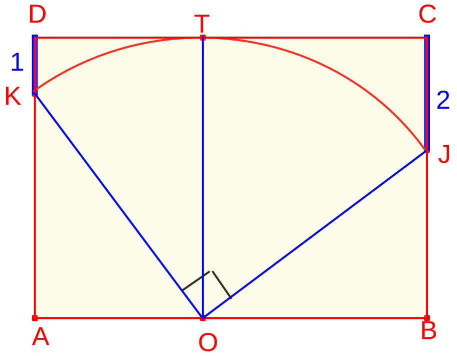
MP=(1/2)CQ=3

[Blava]=4·[MPN]=36

5420.- La figura està formada per un rectangle que conté un quadrant.
Calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:



BJ=AO=a
AK=OB=a+1
OT=OK=a+2
Teorema Pitàgores AOK

$(a+2)^2=a^2+(a+1)^2$

a=3

[ABCD]=(2a+1)(a+2)=7·5=35