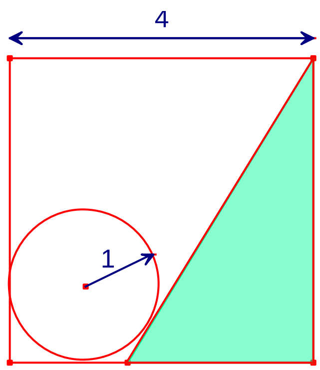
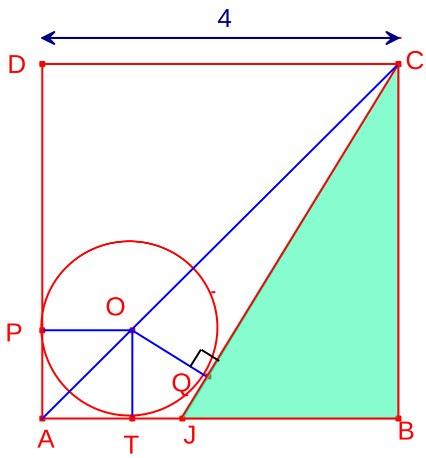
Problemes de Geometria per a l'ESO 544

5431.- La figura està formada per un quadrat de costat 4, una circumferència tangent a dos costats del quadrat de radi 1 i una segment tangent a la circumferència.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.

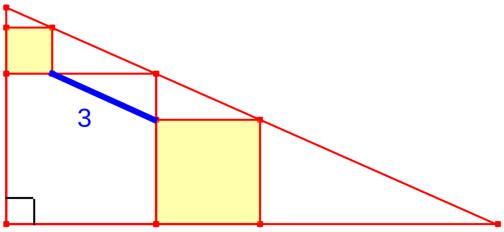


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OP} = \overline{OQ} = 1$
Els punts A, O, C està alineats.
$\overline{OC} = 3\sqrt{2}$
Siga $\overline{TJ} = \overline{QJ} = a$
$\overline{BJ} = 3 - a$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQC}$:
$\overline{CQ} = \sqrt{17}$
$\overline{CJ} = a + \sqrt{17}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JBC}$:
$\left(a + \sqrt{17}\right)^2 = 16 + (3 - a)^2$
Simplificant:
$\left(6 + 2\sqrt{17}\right)a = 8$
Resolent l'equació:
$$a = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$
L'àrea del triangle ombrejat és:
$$S_{JBC} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right) \cdot 4 = 9 - \sqrt{17}$$

5432.- La figura està formada per un triangle rectangle que conté tres quadrats. Calculeu l’àrea de la zona ombrejada.

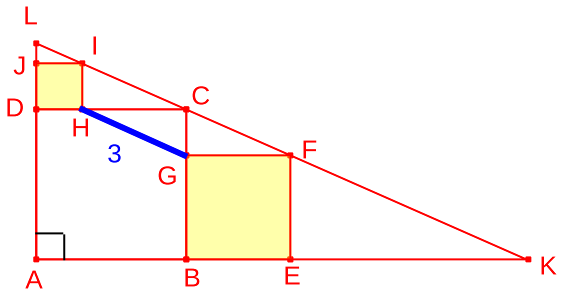


Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = a$

Siga el quadrat $DHIJ$ de costat $\overline{DH} = b$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IHC}, \overset{\Delta}{CGF}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{c-b} = \frac{c-a}{a}$$

$$c^2 = (a+b)c$$

$$c = a + b$$

$$\overline{CH} = c - b = a, \overline{CG} = c - a = b$$

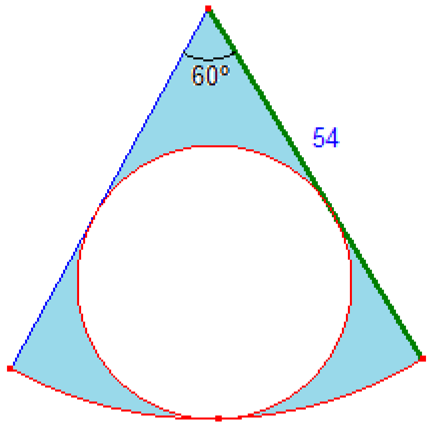
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangles $\overset{\Delta}{HCG}$:

$$a^2 + b^2 = 9$$

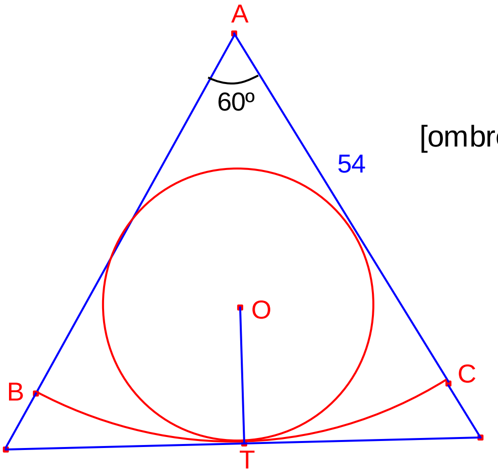
L’àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = S_{BEFG} + S_{DHIJ} = a^2 + b^2 = 9$$

5433,. La figura està formada per un sector de radi 54 i 60º i una circumferència inscrita. Calculeu l'àrea ombrejada.



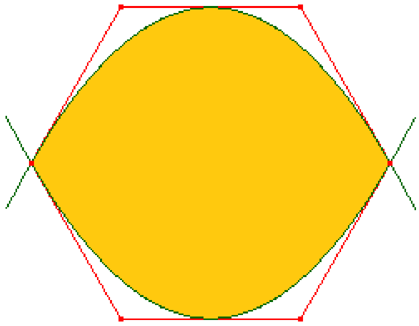
Solució:



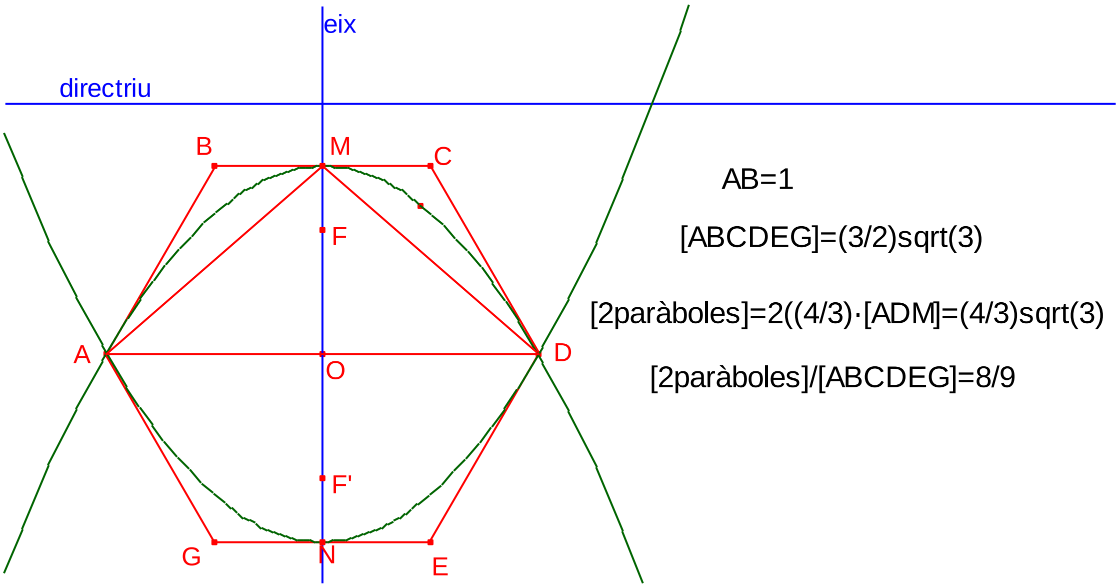
OT=AT/3=18

[ombrejada]=(1/6)·Pi·54²-Pi·18²=162·Pi

5434.- La figura està formada per un hexàgon regular i dues paràboles.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon.



Solució:



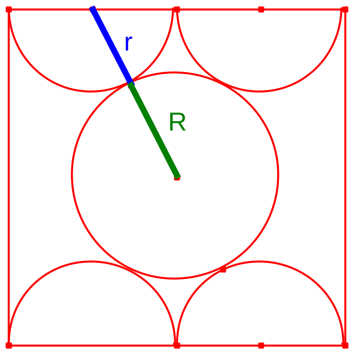
AB=1

[ABCDEG]=(3/2)sqrt(3)

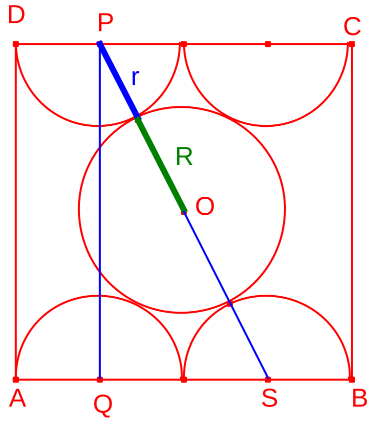
[2paràboles]=2((4/3)·[ADM]=(4/3)sqrt(3)

[2paràboles]/[ABCDEG]=8/9

5435.- La figura està formada per un quadrat, quatre semicircumferències de radi r i una circumferència tangent a les quatre semicircumferències, de radi R.
Calculeu la proporció:
$$\frac{2r}{R}$$

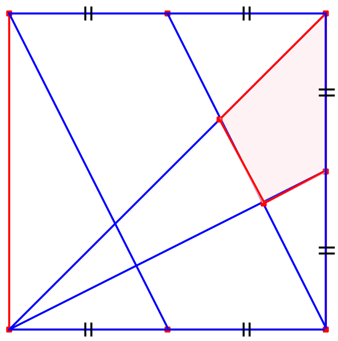


Solució:
Siga el quadrat de costat $\overline{AB} = 4r$
$\overline{PQ} = 4r, \overline{QS} = 2r, \overline{PS} = 2(r + R)$

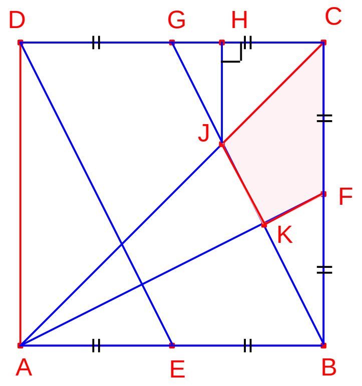


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQS}$:
$$4(r + R)^2 = 16r^2 + 4r^2$$
$$4r^2 + 2rR - R^2 = 0$$
Resolent l'equació:
$$\frac{r}{R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$
$$\frac{2r}{R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

5436.- La figura està formada per un quadrat i quatre segments.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=c

Els triangles ABF, BCG són iguals i costats perpendiculars

angleFKB=90º

els triangles ABJ, CGJ són semblants de raó 2 : 1

HJ=c/3

[CGJ]=(1/12)·[ABCD]

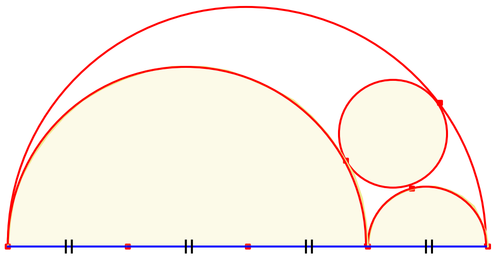
[ABF]=[BCG=(1/4)·[ABCD]

els triangles ABF, BKF són semblants de raó sqrt(5) : 1

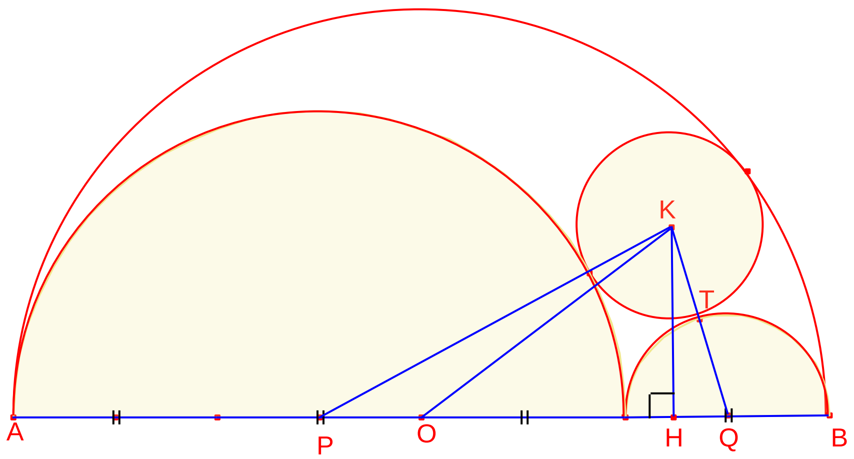
[BKF]=(1/5)[ABF]=(1/20)[ABCD]

[CJKF]=((1/4)-(1/12+1/20)·[ABCD]=(7/60)·[ABCCD]

5437.- La figura està formada per tres semicircumferències i una circumferència.
El diàmetre de la semicircumferència gran està dividit en quatre parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle gran.



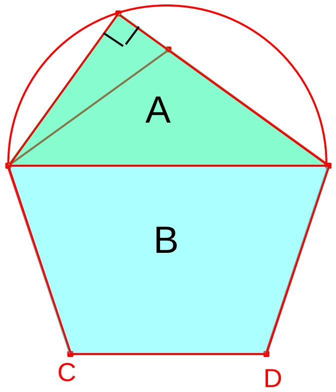
Solució:



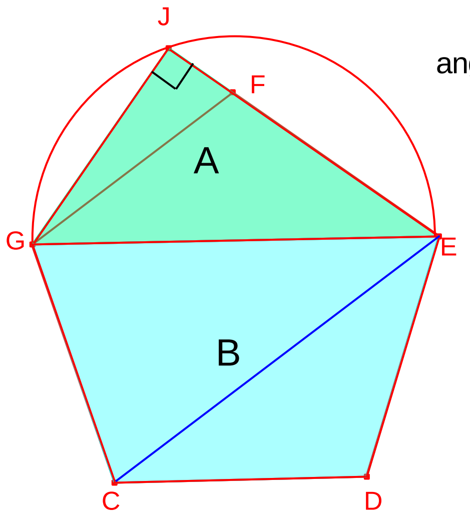
Siga $\overline{QB} = r, \overline{PA} = 3r, \overline{OB} = 4r$
Siga $\overline{KT} = s$
Siga $\overline{QH} = a$
$\overline{PK} = 3r + s, \overline{OK} = 4r - s, \overline{QK} = r + s$
$\overline{OH} = 3r - a, \overline{PH} = 4r - a$

Aplicant el teorema el Pitàgores als triangles rectangles $K\overset{\Delta}{H}Q, O\overset{\Delta}{H}K, P\overset{\Delta}{H}K$
$(r+s)^2 - a^2 = (4r-s)^2 - (3r-a)^2 = (3r+s)^2 - (4r-a)^2$
Simplificant:
$\begin{cases} 3r^2 - 5rs + 3ar = 0 \\ 7r^2 - 7rs - ar \end{cases}$
$s = \frac{12}{13}r$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9r^2 + \frac{1}{2} \cdot r^2 + \frac{144}{169}r^2}{\frac{1}{2} \cdot 16r^2} = \frac{989}{1352}$

5438.- En la figura, un costat del pentàgon regular s'estén fins la semicircumferència.
Calculeu la proporció entre les àrees $A : B$



Solució:



angleGEF=angleGEC=angleCED=36º

CD=1

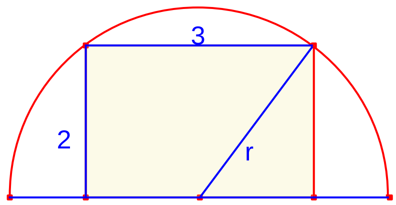
GE= Φ

angleGJE=90º

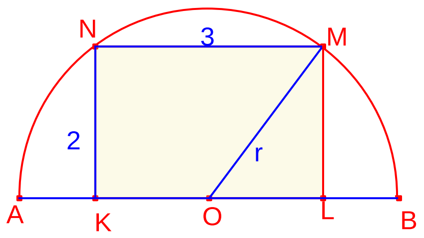
FE=GE·cos 36º=$\Phi^2/2$

A/B =($\Phi^3/2$) / ($\Phi + \Phi^2$)=1/2

5439.- La figura està formada per una semicircumferència que té inscrit un rectangle de costats 2, 3.
Calculeu el radi de la semicircumferència.



Solució:



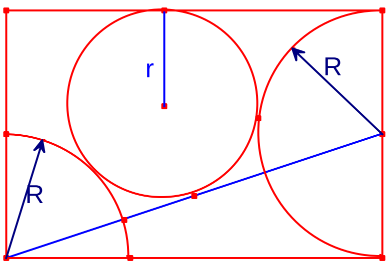
OL=3/2

Pitàgores OLM

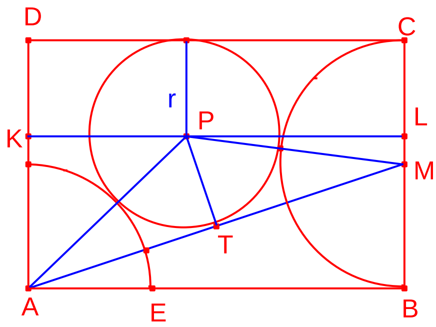
$r^2=4+9/4=25/4$

r=5/2

5440.- La figura està formada per un rectangle que conté un quadrant i una semicircumferència de radi R i una circumferència de radi r.
Calculeu la proporció:
$\frac{R}{r}$



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = b, \overline{BC} = 2R$
Siga $\overline{AT} = \overline{MT} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:
$a^2 = r^2 + 2rR$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:
$b^2 = 4a^2 - R^2 = 3R^2 + 8rR$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKP}$:
$\overline{KP} = \sqrt{2rR - 3R^2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PLM}$:
$\overline{PL} = 2\sqrt{rR}$
$\sqrt{3R^2 + 8rR} = \sqrt{2rR - 3R^2} + 2\sqrt{rR}$
Simplificant:
$9R^2 - 6rR - 23r^2 = 0$
$\frac{R}{r} = \frac{-1 + 2\sqrt{6}}{3}$