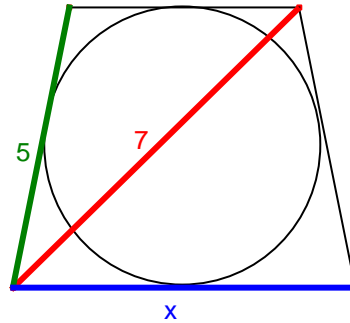
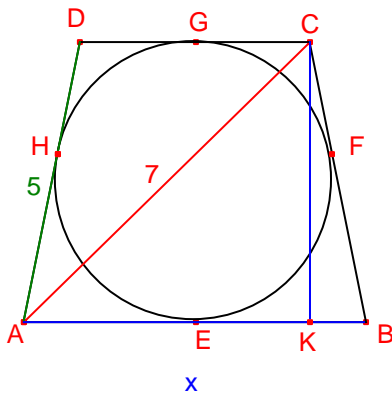


Problemes de Geometria per a l'ESO 547

5461.- La figura està formada per un trapezi isòsceles que té inscrita una circumferència. Calculeu la mesura del costat x

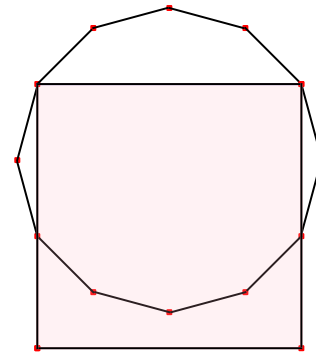


Solució:

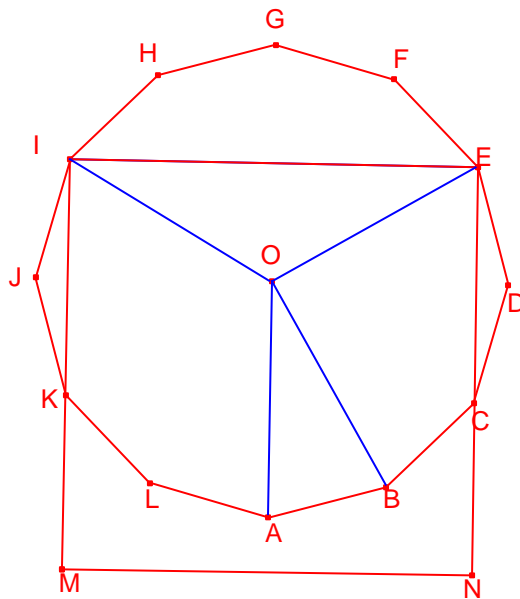


$$\begin{aligned}
 AE &= AH = x/2 \\
 DH &= DG = CG = 5 - x/2 \\
 BK &= x - 5 \\
 AK &= 5 \\
 \text{teorema Pitàgores AKC} \\
 CH^2 &= 47 - 25 = 24 \\
 \text{teorema Pitàgores BKC} \\
 25 &= 24 + (x - 5)^2 \\
 x &= 6
 \end{aligned}$$

5462.- La figura està formada per un dodecàgon regular i un quadrat.
 Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea del dodecàgon regular.



Solució:



$$OA=1$$

$$[ABCDEFGHIJKL]=12 \cdot [ABO]=12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=3$$

$$EI=c$$

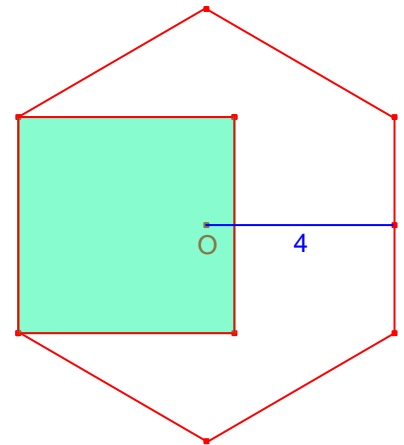
$$\text{angle}EOI=120^\circ$$

$$c^2=1+1+2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)=3$$

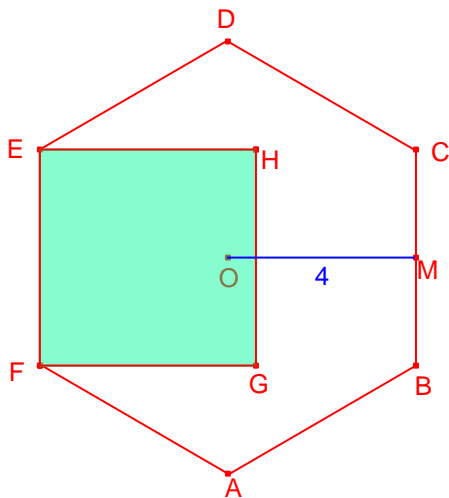
$$[MNEI]=c^2=3$$

$$[ABCDEFGHIJKL]=[MNEI]$$

5463.- La figura està formada per un hexàgon regular i un quadrat.
 La distància del centre de l'hexàgon regular a un costat és 4.
 Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:



$$EF=c$$

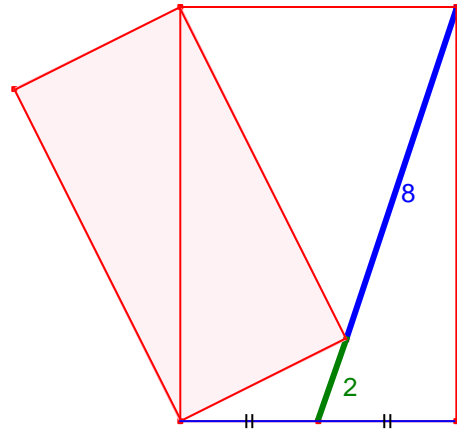
$$OM=c \cdot \sqrt{3}/2$$

$$c=8/\sqrt{3}$$

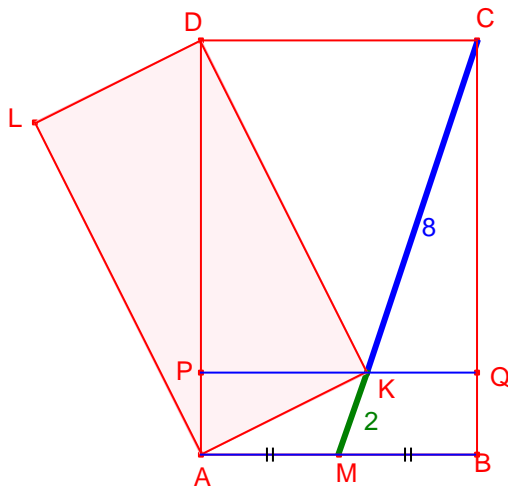
$$c^2=64/3$$

$$[FGHE]=c^2=64/3$$

5464.- La figura està formada per dos rectangles.
 Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:



$$AM=BM=a, AD=BC=b$$

$$100=a^2+b^2$$

$$KQ/a=8/10$$

$$KQ=(4/5)a$$

$$PK=(6/5)a$$

$$CQ=(4/5)b, BQ=(1/5)b$$

teorema Altura AKD

$$((6/5)a)^2=(1/5)(4/5)b^2$$

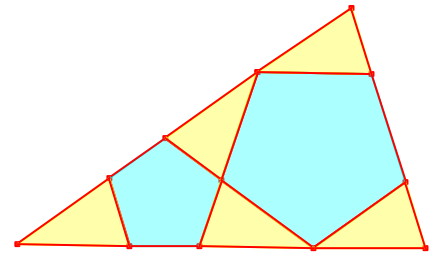
$$b=3a$$

$$100=(10/9)b^2$$

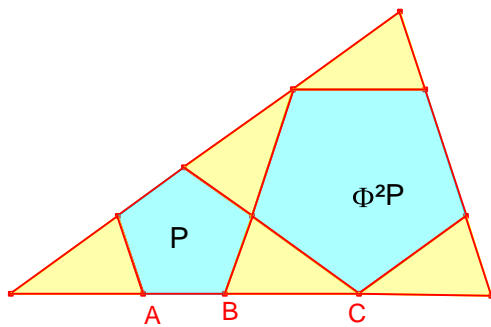
$$b^2=90$$

$$[AKDL]=2[AKD]=b \cdot (6/5)a=(2/5)b^2=36$$

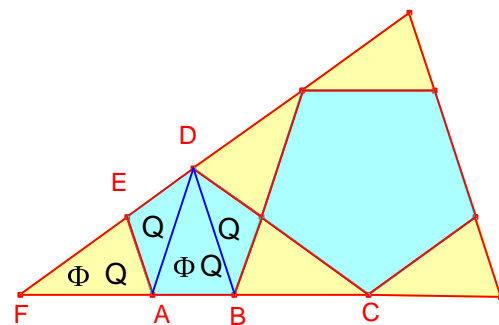
5465.- La figura està formada per un triangle que conté dos pentàgons regulars.
 Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga



Solució:



$$BC : AB = 1 : \Phi$$



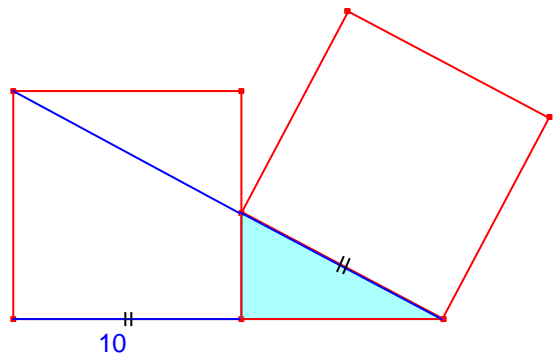
$$P = (2 + \Phi) Q$$

$$[\text{Blava}] = (1 + \Phi^2) P = 5(1 + \Phi) Q = 5 \cdot \Phi^2 \cdot Q$$

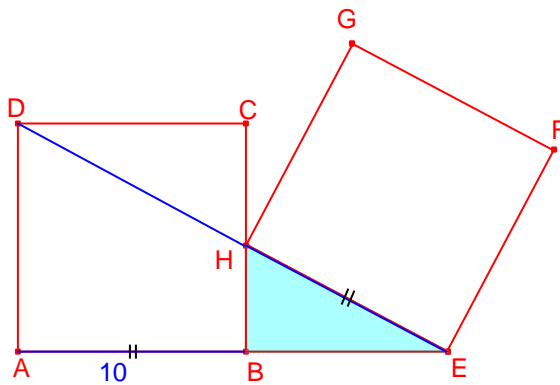
$$[\text{Groga}] = 5 \cdot \Phi \cdot Q$$

$$[\text{Blava}] / [\text{Groga}] = \Phi$$

5466.- La figura està formada per dos quadrats iguals de costats 10. Calcula l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



$$AB=EF=10$$

$$BE=a, BH=b$$

$$a^2+b^2=100$$

$$S=[BEH]=ab/2$$

$$b/10 = a/(10+a)$$

$$ab=10(a-b)$$

$$(a-b)^2=100-2ab=100-4S$$

$$a-b = \sqrt{100-4S}$$

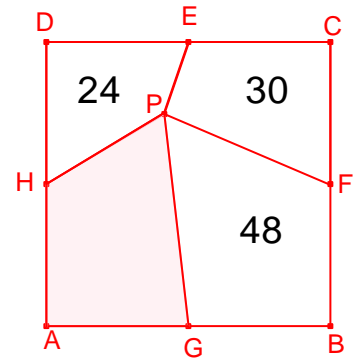
$$S=5 \cdot \sqrt{100-4S}$$

$$S^2+100S-2500=0$$

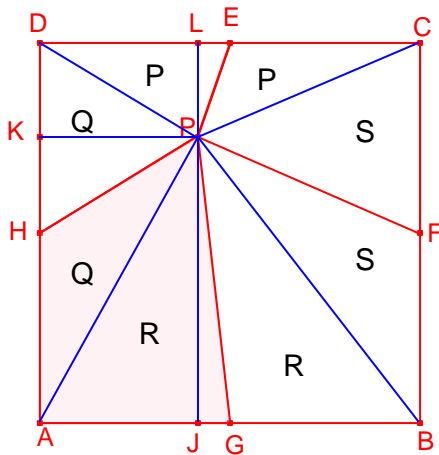
$$S=50(-1+\sqrt{2})$$

5467.- La figura està formada per un quadrat $ABCD$.
 Siguen E, F, G, H els punts migs dels costats.
 Siga P un punt interior al quadrat tal que les àrees $S_{HPDE} = 24$,
 $S_{EPFC} = 30$, $S_{FPGB} = 48$

- Calculeu l'àrea del quadrilàter $GPFA$
- En el sistema de referència afí $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ determineu les coordenades del punt P



Solució:



$$\begin{aligned} P + Q &= 24 \\ P + S &= 30 \\ R + S &= 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q + R &= R + S + P + Q - (P + S) = 48 + 24 - 30 = 42 \\ [ABCD] &= 48 + 30 + 24 + 42 = 144 \\ \overline{AB} &= \overline{AD} = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{PJ} &= a, \overline{PK} = b, \overline{PL} = 12 - a \\ 42 &= Q + R = \frac{1}{2} \cdot 6b + \frac{1}{2} \cdot 6a \\ a + b &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24 &= Q + P = \frac{1}{2} \cdot 6b + \frac{1}{2} \cdot 6(12 - a) \\ -a + b &= -4 \end{aligned}$$

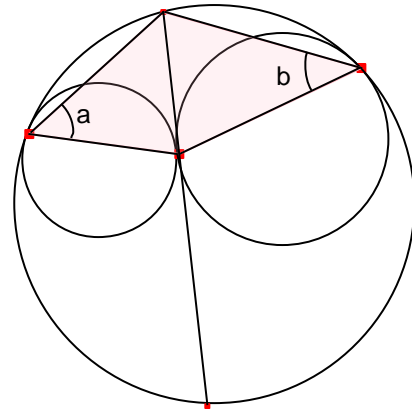
Resolent el sistema:

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 5 \end{cases}$$

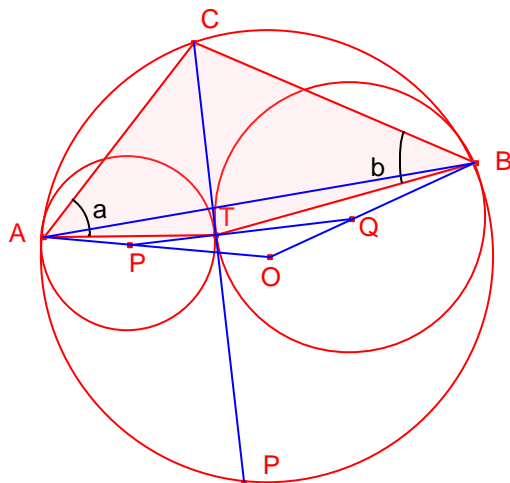
Les coordenades del punt P en el sistema de referència afí $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ són:

$$P \left(\frac{5}{12}, \frac{9}{12} \right)$$

5468.- La figura està formada per tres circumferències tangents i una recta tangent.
 Calculeu la suma $a + b$. (Es mostren els tres punts de tangència)



Solució:



A, B, T punts de tangència

$$\text{angleCTQ} = \text{angleCTP} = 90^\circ$$

$$\text{angleBTQ} = \text{angleTBQ} = x$$

$$\text{angleATP} = \text{angleTAP} = y$$

$$\text{anglePOQ} = 180^\circ - 2(x+y)$$

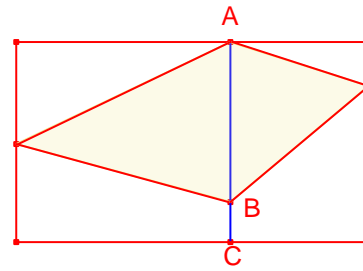
$$\text{angleABC} + \text{angleBAC} = 90^\circ - (x+y)$$

$$\text{angleATB} = 180^\circ - (x+y)$$

$$\text{angleTAB} + \text{angleABT} = x+y$$

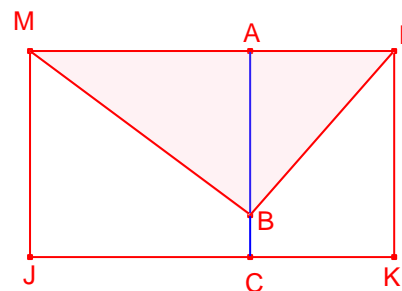
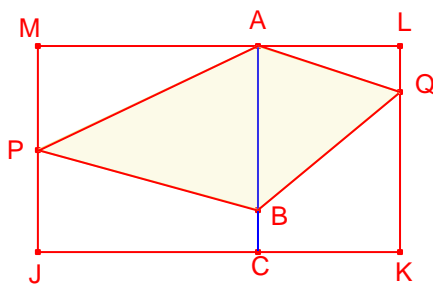
$$a+b = \text{angleABC} + \text{angleBAC} + \text{angleTAB} + \text{angleABT} = 90^\circ - (x+y) + (x+y) = 90^\circ$$

5469.- La figura està formada per dos rectangles i un quadrilàter ombrejat.
 Si $\overline{AB} = 4 \cdot \overline{BC}$, calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea total de la figura.



$$AB=4 \cdot BC$$

Solució:



$$[APBQ]=[LMB]$$

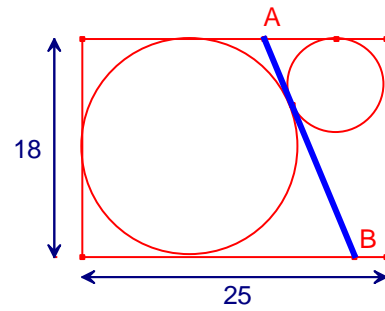
$$JK=a, JM=5b, AB=4b$$

$$[JKLM]=5ab$$

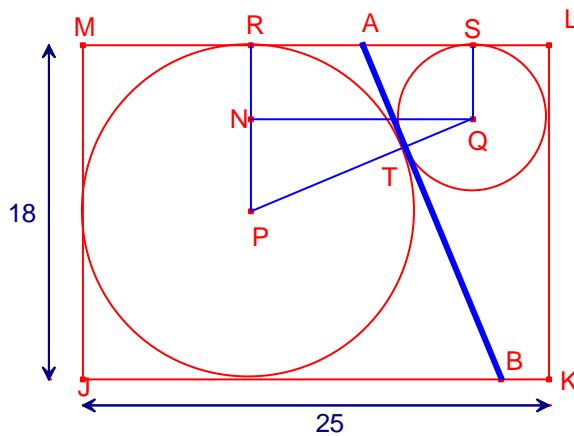
$$[LMB]=\left(\frac{1}{2}\right)a \cdot 4b=2ab$$

$$[APBQ]/[JKLM]=2/5$$

5470.- La figura està formada per un rectangle de costats 25 i 18 i dues circumferències tangents interiors.
 Calculeu la mesura del segment de tangència \overline{AB}



Solució:



$$\begin{aligned}
 PR &= 9, QS = r \\
 QN &= RS = 16 - r \\
 PQ &= 9 + r \\
 (9 + r)^2 &= (9 - r)^2 + (16 - r)^2 \\
 r &= 4 \\
 RA &= AT = AS = 12/2 = 6 \\
 \text{angle } SAQ &= x \\
 \tan x &= 4/6 \\
 \tan(2x) &= 12/5, \sin(2x) = 12/13 \\
 18/AB &= \tan(2x) = 12/13 \\
 AB &= 39/2
 \end{aligned}$$