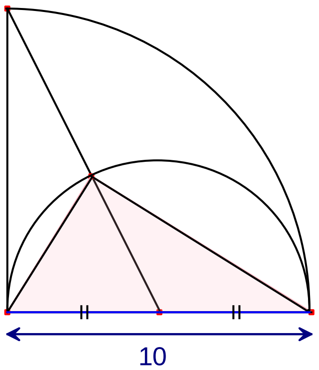
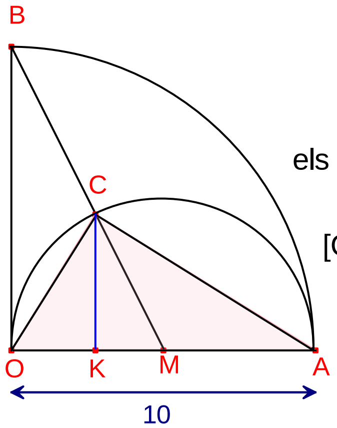
5471.- La figura està formada per un quadrant de radi 10
i una semicircumferència sobre un radi.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



OB=10, OM=5

BM=5·sqrt(5)

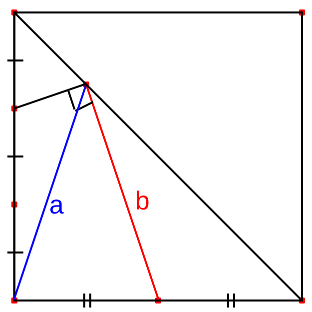
MC=MO=5

els triangles OMB, KMC semblants

CM=2·sqrt(5)

[OAC]=(1/2)·10·2·sqrt(5)=10·sqrt(5)

5472.- La figura està formada per un quadrat, dos costats del qual s'han dividit en tres parts i dos parts iguals, la diagonal i dos segments que formen un angle de 90º.



Proveu que $a = b$

Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6$.

$\overline{BD} = 6\sqrt{2}$

A partir del problema 5459:

$\overline{DF} : \overline{BF} = 1 : 3$

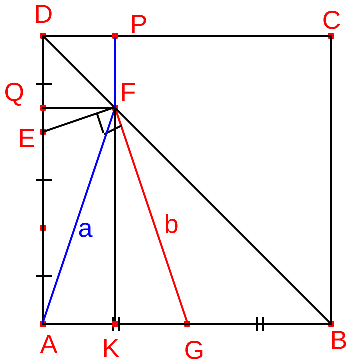
$\overline{DF} = \frac{1}{4}\overline{BD} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DPF}$

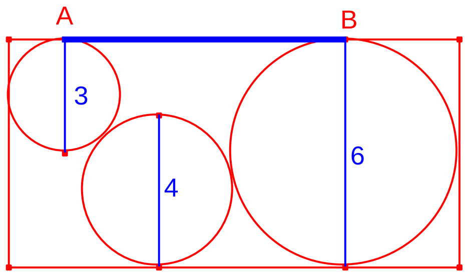
$\overline{DP} = \overline{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}$

K és el punt mig del segment $\overline{AG}$

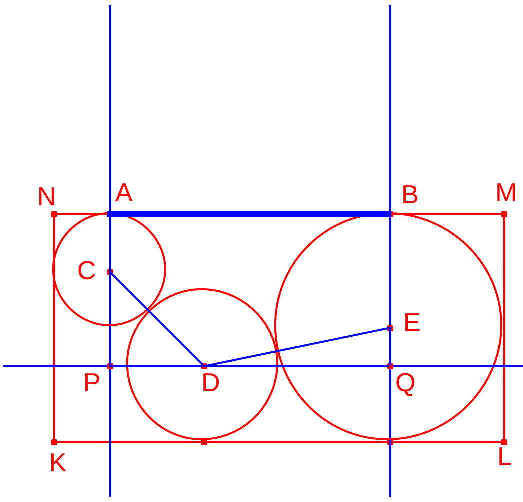
Aleshores, $a = \overline{AF} = \overline{GF} = b$



5473.- La figura està formada per un rectangle que conté tres circumferències de diàmetres 3, 4, 6. Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$ i l'àrea del rectangle.



Solució:



DE=5, EQ=1

DQ=2·sqrt(6)

CD=7/2.CQ=5/2

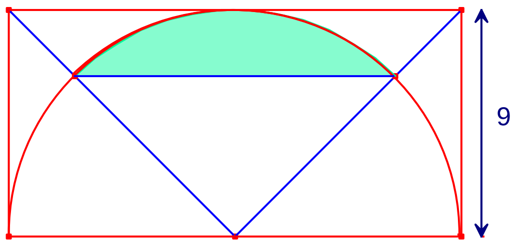
PD=sqrt(6)

AB=PQ=3·sqrt(6)

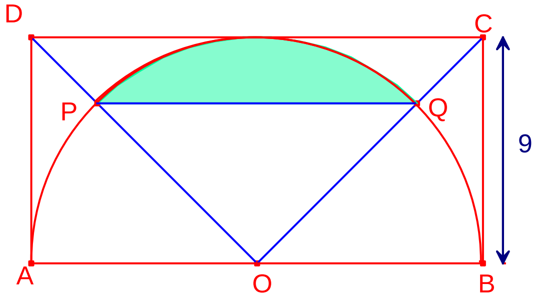
KL=3+3/2+3·sqrt(6)=9/2+3·sqrt(6)

[KLMN]=9(3+2·sqrt(6))

5474.- La figura està formada per un rectangle que conté una semicircumferència.
Calculeu l'àrea del segment circular ombrejat.

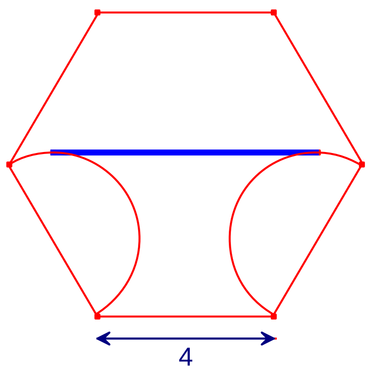


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 18, \overline{BC} = 9$
$\overline{OB} = \overline{OQ} = 9, \angle DOC = 90°$



L'àrea del segment circular és:
$S_{0mbrejada} = \frac{1}{4}\pi \cdot 9^2 - \frac{1}{2} \cdot 9^2 = \frac{81}{4}(\pi - 2) \approx 23.1173$

5475.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 4, i dues semicircumferències. Calculeu la mesura del segment tangent a les dues semicircumferències.



Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 4$

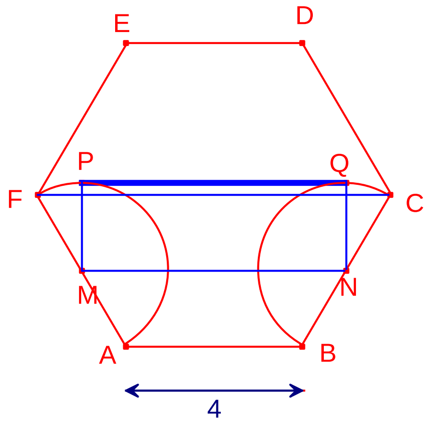
Siguen M, N els centres de les semicircumferències.

Siga $\overline{PQ}$ el segment de tangència.

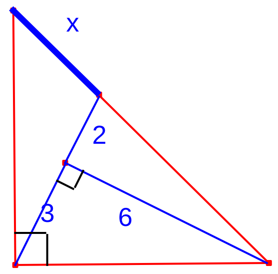
$MNQP$ és un rectangle.

$\overline{MN}$ és la paral·lela mitjana del segments $\overline{AB} = 4, \overline{FC} = 8$.

$$\overline{PQ} = \overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{FC}}{2} = \frac{4+8}{2} = 6$$



5476.- La figura està formada per un triangle rectangle que conté un altre triangle equilàter. Calculeu la mesura del segment x



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}, D = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$

$\overline{AB} = 3\sqrt{5}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDB}$

$\overline{BE} = 2\sqrt{10}$

Siguen $\alpha = \angle ABD, \beta = \angle DBE$.

$\tan\alpha = \frac{1}{2}, \tan\beta = \frac{1}{3}$

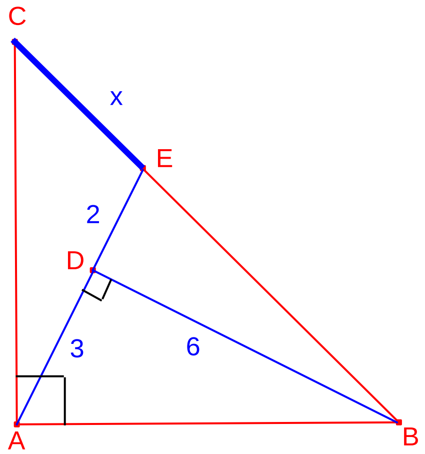
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$

Aleshores el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.

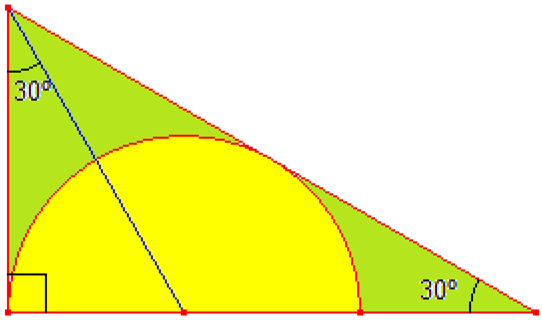
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$x + 2\sqrt{10} = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$

$x = \sqrt{10}$

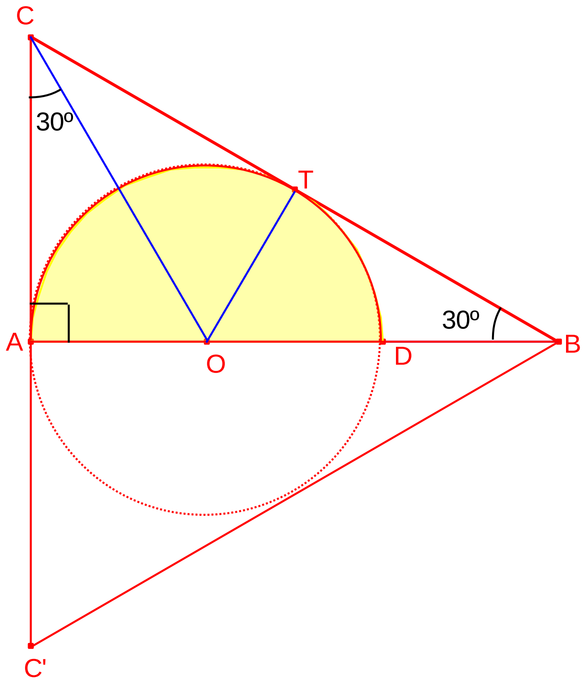


5477.- La figura està formada per un triangle rectangle i una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea groga.

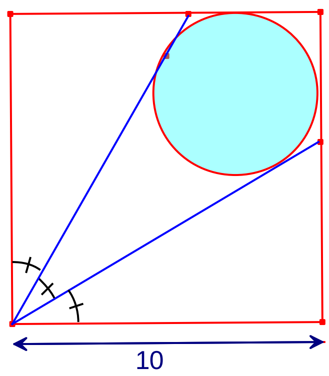


Solució:
Siga $\overline{OA} = \overline{OT} = r$
$\overline{OD} = r, \overline{OB} = 2r$
$\overline{AC} = r\sqrt{3}$

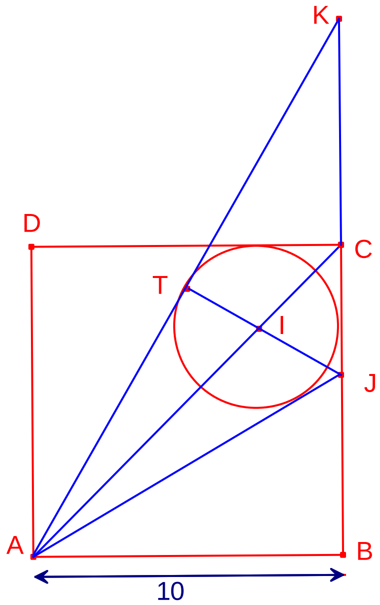
$$\frac{[verda]}{[groga]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3r \cdot r\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi \cdot r^2}{\frac{1}{2}\pi \cdot r^2} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{\pi} \approx 0.6540$$



5478.- La figura està formada per un quadrat de costat 10.
Un dels vèrtexs del quadrat s’ha dividit en tres parts iguals.
Calculeu l’àrea del cercle ombrejat.



Solució:



IT=r

AK=20

AT=10

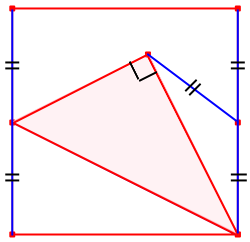
AJ=KJ=(20/3)sqrt(3)

TJ=(10/3)sqrt(3)

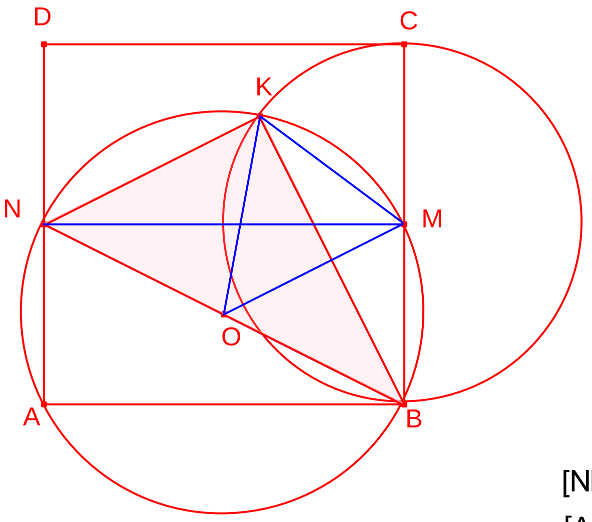
[ABK]=((20+(40/3)sqrt(3)/2·r=(1/2)20·(10/3)sqrt(3)

r=10(2-sqrt(3))
[cercle]=Pi·r^2=Pi·100(7-4·sqrt(3))

5479.-La figura està formada per un quadrat que conté un triangle rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle rectangle i l'àrea del quadrat.

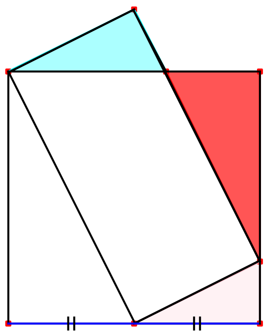


Solució:



AB=2
BM=MK=1
BN=sqrt(5)
El quadrilàter NBMK és cíclic
OK=OM=ON=sqrt(5)/2
angleKOM=angleMOB=x
angleKNB=x
teorema cosinus KOM
1=5/4+5/4-2·5/4·cos x
cos x=3/5, sin x=3/5
KN=(3/5)·sqrt(5)
BK=(4/5)·sqrt(5)
[NKB]=(1/2)·KN·BK=6/5
[ABCD]=4
[NKB]/[ABCD]=3/10

5480.- La figura està formada per un quadrat i un rectangle.
Proveu que l'àrea del triangle roig és igual a la suma de les àrees del triangle morat i del triangle blau.



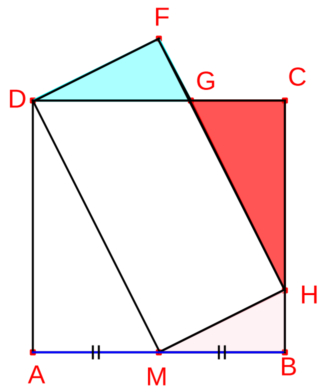
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAM}, \overset{\Delta}{MBH}, \overset{\Delta}{HCG}, \overset{\Delta}{DFG}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{BH} = \frac{1}{2}$

$\overline{CH} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \overline{CG} = \frac{3}{4}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBH}$:

$\overline{MH} = \overline{DF} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \overline{Fg} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

$S_{DFG} + S_{MBH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$

$S_{HCG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

Aleshores, $S_{DFG} + S_{MBH} = S_{HCG}$