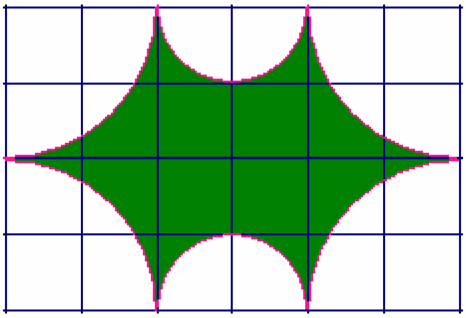
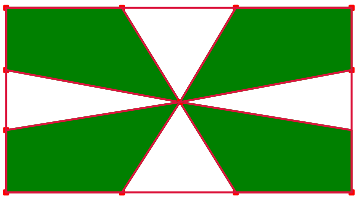
Problemes de Geometria per a l'ESO 55

541.- Quina proporció d'àrea del rectangle representa la regió ombrejada que està limitada per arcs de circumferència.
Prova Cangur 98. Nivell 3. problema 23.

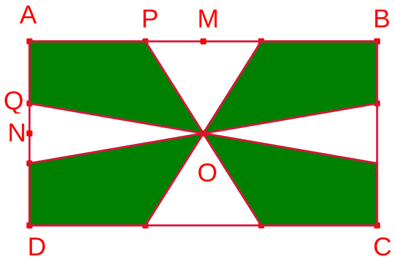


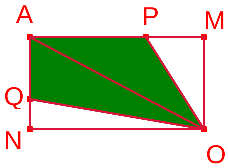
Solució:
Suposem que cada quadrat de la quadrícula té costat 1.
L'àrea del rectangle és 24.
L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea del rectangle menys l'àrea d'un cercle de radi 2 i un cercle de radi 1.
L'àrea de la zona ombrejada és:
$S_O = 24 - \pi 2^2 - \pi 1^2 = 24 - 5\pi$.
La proporció entre les àrees és:
$\frac{24 - 5\pi}{24} \approx 0'3455$.

542.- La bandera de la dreta s'ha dibuixat dividint cada costat en tres parts iguals.
Quina és la raó entre la part blanca i la part acolorida.



Solució:





Siga ABCD el rectangle que forma la bandera.
Siga O el centre del rectangle.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. Siga N el punt mig del costat $\overline{AD}$
El motiu mínim del mosaic de la bandera és el rectangle AMON.

Siga $x=\overline{AB}$.

$\overline{AP}=\frac{1}{3}x$, $\overline{PM}=\frac{1}{6}x$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

Els triangles $\overset{\Delta}{PMO}$, $\overset{\Delta}{APO}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{PMO}}{S_{APO}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{AP}}=\frac{\frac{1}{6}x}{\frac{1}{3}x}=\frac{1}{2}.$$

Siga $y=\overline{AD}$.

$\overline{AQ}=\frac{1}{3}y$, $\overline{QN}=\frac{1}{6}y$.

Anàlogament: $\frac{S_{QNO}}{S_{AQO}}=\frac{1}{2}$

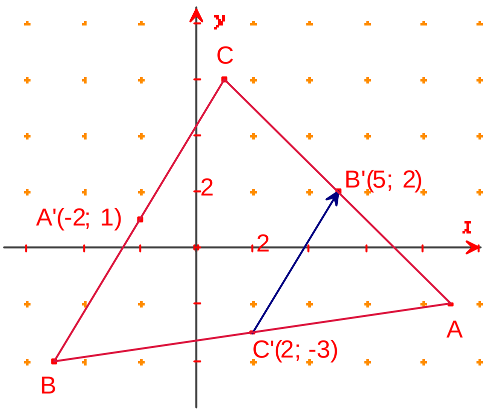
$\frac{S_{PMO}}{S_{APO}}=\frac{S_{QNO}}{S_{AQO}}=\frac{1}{2}$, aleshores:

$\frac{S_{PMO}+S_{QNO}}{S_{APO}+S_{AQO}}=\frac{1}{2}$. Aleshores, la raó entre la part blanca i la part acolorida és 1:2.

543.- Determineu les coordenades dels vèrtex d'un triangle coneguts els punts migs dels costats $(-2,1)$, $(5,2)$, $(2,-3)$.

Solució:

Siguen $A'(-2,1)$, $B'(5,2)$, $C'(2,-3)$ els punts migs dels costats $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, respectivament, del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



$\overline{B'C'}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, aleshores:

$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{C'B'}$.

Siga $C(x,y)$, $(x+2,\ y-1) = (3,5)$.

Resolent l'equació vectorial: $C(1,6)$

$\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{C'B'}$.

Siga $B(x,y)$, $(-2-x, 1-y) = (3,5)$.

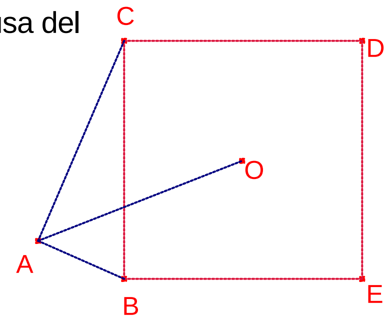
Resolent l'equació vectorial: $B(-5,-4)$.

C és el punt mig del costat $\overline{AB}$ aleshores, $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A}$.

Siga $A(x,y)$.

$(7,1) = (x-2,\ y+3)$. Resolent l'equació vectorial: $A(9,-2)$.

544.- Siga O el centre del quadrat BCDE construït sobre la hipotenusa del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.



a) Demostreu que AO bisecta l'angle $\angle BAC$.

b) Prolongant el costat $\overline{AB}$ des de B un segment $\overline{BF}$ igual a $\overline{AC}$, demostreu que ACEF és un trapezi.

c) Com ha de ser el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ a fi que el trapezi tinga la mateixa àrea que el quadrat?

Solució:

a)

$\angle BAC = \angle BOC = 90^o$, aleshores, el quadrilàter ABOC és inscriptible.

$\angle OAB = \angle BCO = 45^o$ per ser els angles inscrit en la circumferència i abraçar el mateix arc.

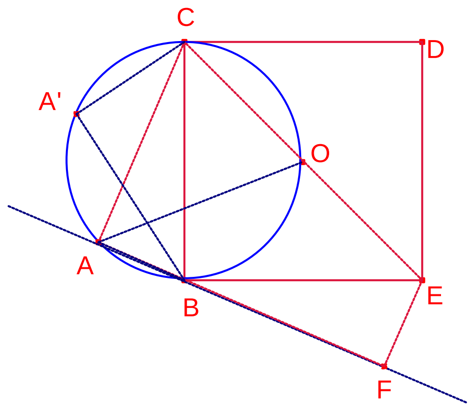
b)

Siga $\alpha = \angle ACB$.

Notem que $\angle EBF = \angle ACB = \alpha$.

$\overline{AC} = \overline{BF}$, $\overline{BC} = \overline{BE}$, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FEB}$ són iguals, per tant, $\angle BFE = 90^o$.

Aleshores, $\overline{AC}$ i $\overline{FE}$ són paral·lels, per tant, ACEF és un trapezi.



c)

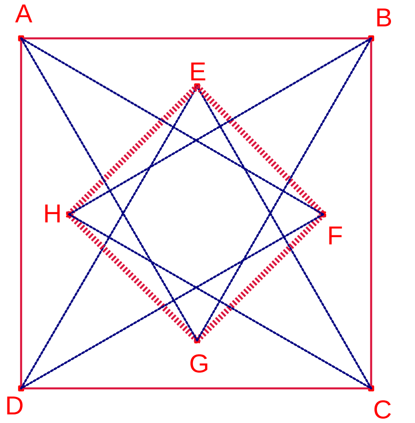
Siga A' el punt mig de l'arc $\overset{\frown}{BAC}$.

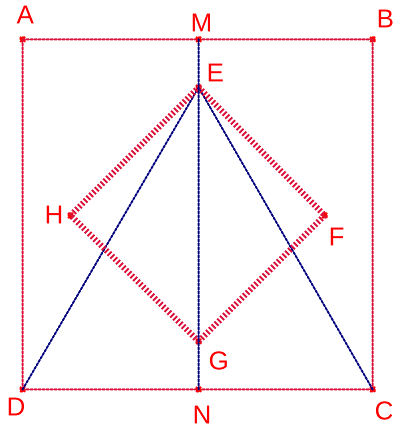
Els triangles $\overset{\Delta}{A'BC}$ $\overset{\Delta}{OCD}$ són iguals.

Aleshores, l'àrea del trapezi A'CEF és igual a l'àrea del quadra BCDE.

A més a més, si A és distint de A' l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{A'BC}$ és major que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

545. En la figura, el quadrat ABCD té costat 1m i els triangles $\overset{\Delta}{ABG}$, $\overset{\Delta}{BCH}$, $\overset{\Delta}{CDE}$ i $\overset{\Delta}{DAF}$ són equilàters. Calculeu l'àrea de EFGH.





Solució:
EFGH és un quadrat.
L'àrea del quadrat EFGH és:

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}\overline{EG}^2 .$$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{CD}$.

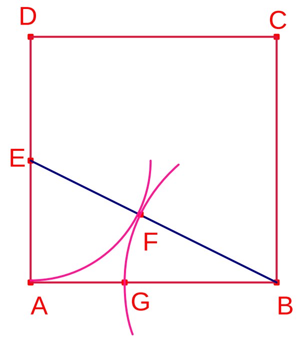
$$\overline{EN} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$$\overline{ME} = \overline{BC} - \overline{EN} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$$\overline{EG} = \overline{BC} - 2 \cdot \overline{ME} = 1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 1 .$$

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}\overline{EG}^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = 2 - \sqrt{3}\ m^2 \approx 0.2679 m^2 .$$

546.- Donat el quadrat ABCD, E és el punt mig del costat $\overline{AD}$.
Siga F sobre el segment $\overline{BE}$ tal que $\overline{AE} = \overline{EF}$.
Siga G sobre el costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{BF} = \overline{BG}$.
Proveu que $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = \overline{BG}^2$.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$.
$\overline{AE} = \overline{EF} = \frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{BE} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\overline{BF} = \overline{BG} = \overline{BE} - \overline{EF} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

$$\overline{AG} = \overline{AB} - \overline{BG} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a.$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AG} = a \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2.$$

$$\overline{BG}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2.$$

Aleshores, $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = \overline{BG}^2$.

Notem que $\overline{BG}$ és mitjana geomètrica de $\overline{AB}, \overline{AG}$. El punt G divideix el segment en mitjana i extrema raó.

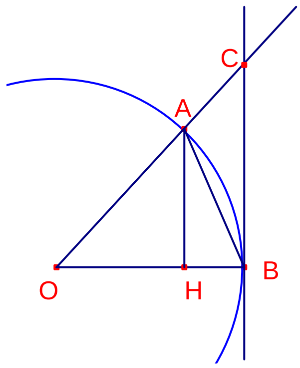
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

547.- Siga la circumferència de centre O i radi 5 i la corda $\overline{AB}$ de longitud 4.
La recta tangent a la circumferència que passa per B i la recta OA s'intersecten en el punt C.
Calculeu la mesura del segment $\overline{BC}$.

Solució 1:
Siga H la projecció de A sobre el radi $\overline{OB}$. Siga $x = \overline{BC}$. Siga $y = \overline{OH}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAH}$:

$\overline{AH}^2 = 5^2 - y^2$ (1)



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAH}$:

$\overline{AH}^2 = 5^2 - (5-y)^2$ (2)

Igualant les expressions (1) (2):

$5^2 - y^2 = 4^2 - (5-y)^2$. Resolent l'equació:

$y = \frac{17}{5}$ (3)

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$\overline{AH} = \frac{4\sqrt{11}}{5}$ (4)

Els triangles $\overset{\Delta}{OAH}$, $\overset{\Delta}{OCH}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{OH}}$. $\frac{x}{5} = \frac{\frac{4\sqrt{21}}{5}}{\frac{17}{5}}$. Resolent l'equació:

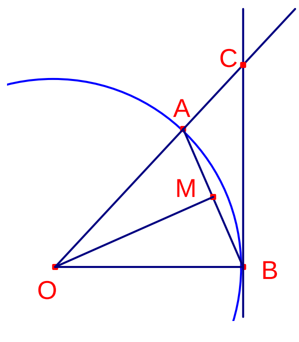
$x = \overline{BC} = \frac{20\sqrt{21}}{17}$.

Solució 2:
Siga $x = \overline{BC}$. Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$. Siga $\alpha = \angle MOB$.

$\sin\alpha = \frac{2}{5}$. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$.

$\angle AOB = 2\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques a triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBC}$:



$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{x}{5}$ (5)

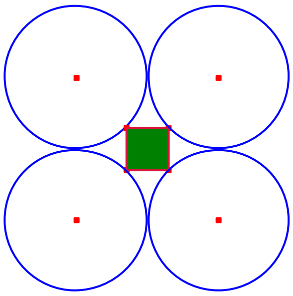
$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{4\sqrt{21}}{21}}{1-\frac{4}{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{17}$ (6)

Igualant les expressions (5) (6):

$\frac{x}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{17}$. Resolent l'equació:

$x = \overline{BC} = \frac{20\sqrt{21}}{17}$.

548.- Els centres de 4 circumferències iguals i tangents formen un quadrat si el radi de les circumferències és r determineu l'àrea del quadrat inscrit en les 4 circumferències (veure figura).



Solució:
Siguen A, B, C, D els centre de les circumferències.
Siga PQRS el quadrat interior.
Siga O el centre del quadrat ABCD.
Per ser les circumferències tangents:

$\overline{AB} = 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}$:

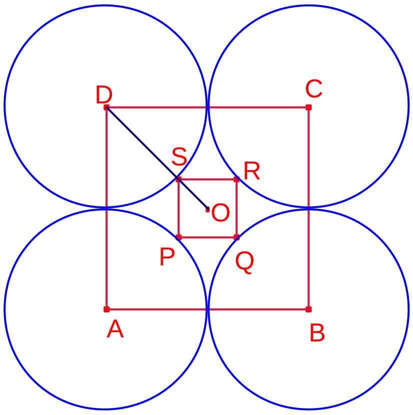
$\overline{BD} = 2r\sqrt{2}$.

$\overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = r\sqrt{2}$.

$\overline{DS} = r$.

$\overline{OS} = \overline{OD} - \overline{DS} = \left(\sqrt{2} - 1\right)r$.

$\overline{SQ} = 2\overline{OS} = \left(2\sqrt{2} - 2\right)r$.



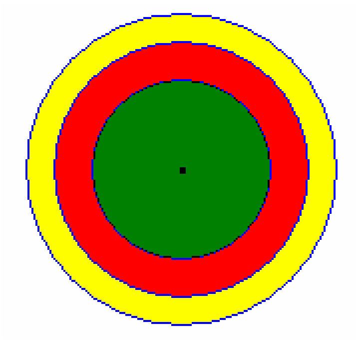
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQS}$:

$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{SQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{2} - 2\right)r = \left(2 - \sqrt{2}\right)r$.

L'àrea del quadrat PQRS és:

$S_{PQRS} = \overline{PQ}^2 = \left(\left(2 - \sqrt{2}\right)r\right)^2 = \left(6 - 4\sqrt{2}\right)r^2$.

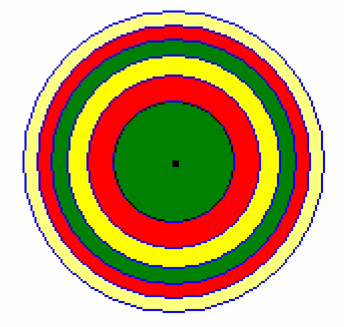
549.- Dividiu un cercle de radi R en tres parts iguals mitjançant dues circumferències concèntriques amb ell.
Quin és el radi de les dues circumferències interiors.



Solució:
Les tres circumferències són homotètiques i el centre de l'homotècia és el centre de les tres.

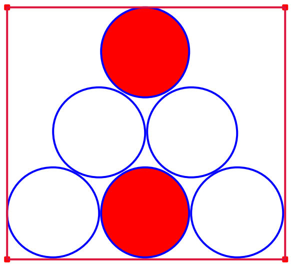
Siga r_1, r_2 els centres de les circumferències, $(r_1 < r_2)$.
Les àrees de les figures homotètiques són proporcionals al quadrat de la raó de proporcionalitat.
L'àrea del cercle mitjà és el doble de l'àrea del cercle menut. Aleshores:
$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 2$. Aleshores, $r_2 = r_1\sqrt{2}$.
L'àrea del cercle gran és el triple de l'àrea del cercle menor. Aleshores:
$\left(\frac{R}{r_1}\right)^2 = 3$. Aleshores, $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}R$.
$r_2 = r_1\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}R$.

Generalització:
Dividiu un cercle de radi R en n parts iguals mitjançant dues circumferències concèntriques amb ell.
Quin és el radi de les circumferències interiors.
Siguen $r_1 < r_2 < r_3 < .... < r_n = R$.



Solució: $r_i = \frac{\sqrt{in}}{n}R$, $i = 1,2,3,....,n$.

550.- En un rectangle que té la base horitzontal de 6 cm de longitud hem dibuixat sis cercles tangents del mateix radi, com es veu a la figura. Quina és, en centímetres, la distància més curta entre els dos cercles ombrejats?
Cangur 2012, nivell 3.



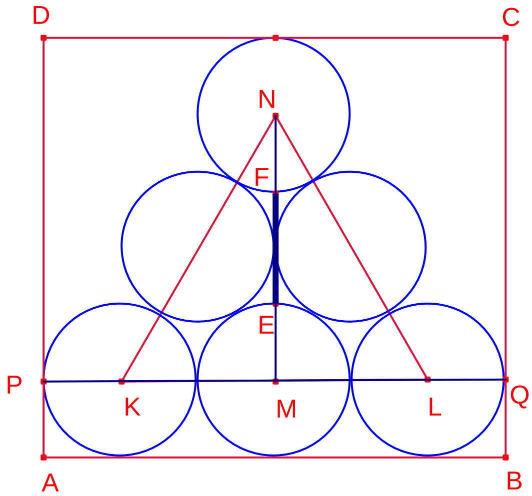
Solució:

$\overline{AB} = 6$.

Siga r el radi dels 6 cercles tangents.

Els centres dels cercles estan en un triangle equilàter de costat $\overline{KL} = 4r$

$\overline{AB} = \overline{PQ} = 6r$.



Aleshores, $r = 1$. El triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLN}$ té costat 4.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMN}$:

$\overline{MN} = 2\sqrt{3}$.

La distància mínima és igual a la mesura del segment $\overline{EF}$ que es troba en la mediatriu del segment $\overline{KL}$.

$\overline{ME} = \overline{NF} = r = 1$.

$\overline{EF} = \overline{MN} - 2 \cdot \overline{ME} = 2\sqrt{3} - 2$.