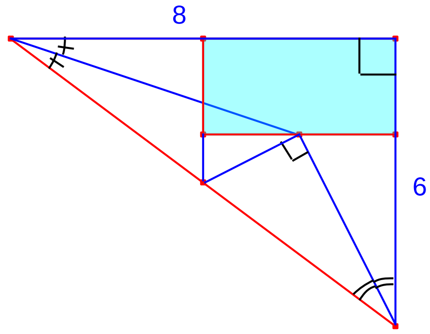
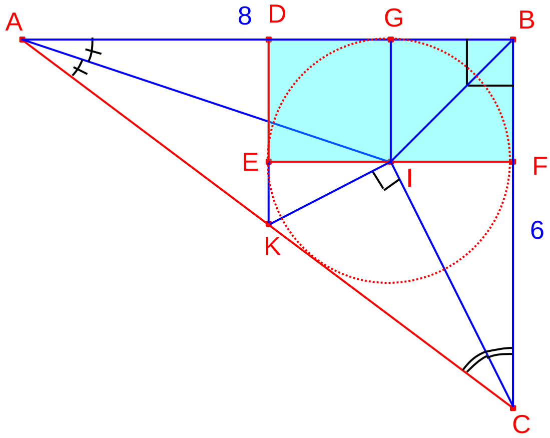
5491.- La figura està formada per un triangle rectangle de catets 6 i 8 i dues bisectrius.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.

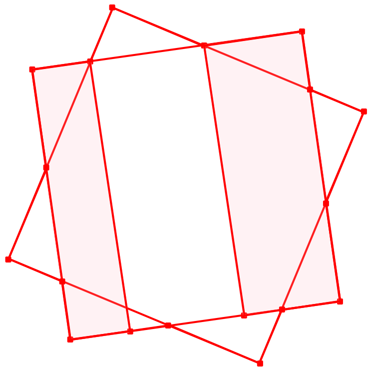


Solució:
$\overline{AC} = 10$
La intersecció de les dues bisectrius és l'incentre.
$\overline{BG} = \overline{FI} = \overline{BF} = \dfrac{6+8-10}{2} = 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CFI}$:
$\overline{CI} = 2\sqrt{10}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CFI}, \overset{\Delta}{CIK}, \overset{\Delta}{IEK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\dfrac{\overline{KI}}{2} = \dfrac{2\sqrt{10}}{6}$
$\overline{KI} = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

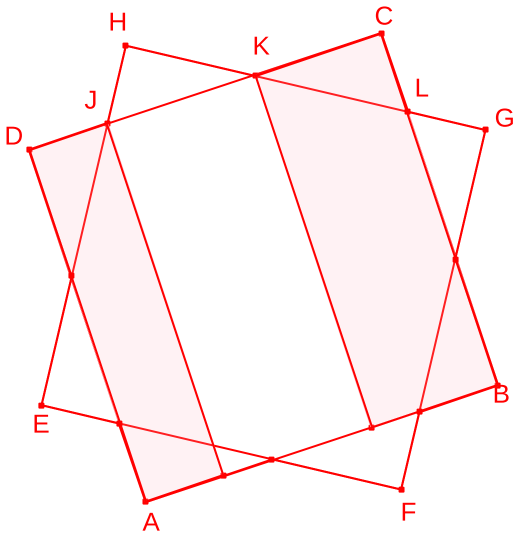
$\dfrac{\overline{EI}}{6} = \dfrac{\frac{2\sqrt{10}}{3}}{2\sqrt{10}}$
$\overline{EI} = 2$
$\overline{EF} = 2 + 2 = 4$
L'àrea del rectangle ombrejat és:
$S_{BDEF} = 4 \cdot 2 = 8$



5492.- La figura està formada per dos quadrats concèntrics.
Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea total de la figura.

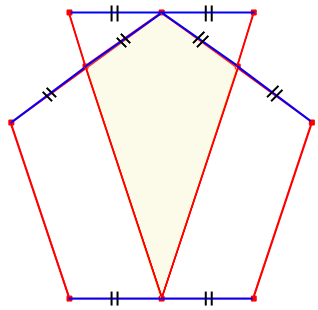


Solució:

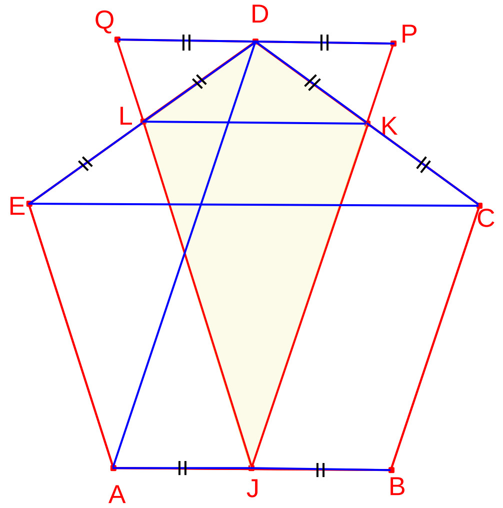


Siguen els quadrats iguals i concèntrics $ABCD, EFGH$
Siguen $\overline{DJ} = \overline{JH} = \overline{CL} = a, \overline{HG} = \overline{CK} = b$
$\overline{JK} = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\overline{CD} = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$
L'àrea total és:
$S_{total} = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{JHK} = 2\left((a+b)^2 + (a+b)\sqrt{a^2+b^2}\right)$
L'àrea ombrejada és:
$S_{rosa} = (a+b) \cdot \left(a + b + \sqrt{a^2+b^2}\right) = (a+b)^2 + (a+b)\sqrt{a^2+b^2}$
$\frac{S_{rosa}}{S_{total}} = \frac{1}{2}$

5493.- La figura està formada per un pentàgon regular, tres costats del qual s'han dibuixats els punts mig.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.



Solució:



Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$$\overline{AD} = \overline{CE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

$$\overline{LK} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{1}{2}\Phi$$

$$\overline{JK} = \frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2} = \frac{1+\Phi}{2} = \frac{1}{2}\Phi^2$$

L'àrea del quadrilàter ombrejat és:

$$S_{JKDL} = S_{JKL} + S_{DLK} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Phi^2\cdot\frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Phi\right)\sin 36° = \frac{1+2\Phi}{4}\cdot\sin 36°$$

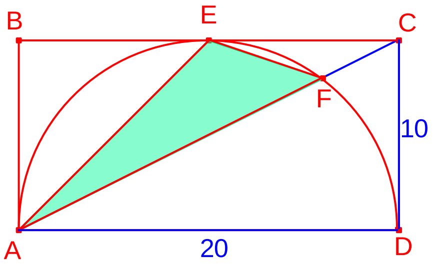
L'àrea total és:

$$S_{total} = S_{ABD} + 2\cdot S_{EAD} + 2\cdot S_{LDQ} = \left(\frac{1}{2}\Phi^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\Phi + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)\sin 36° =$$

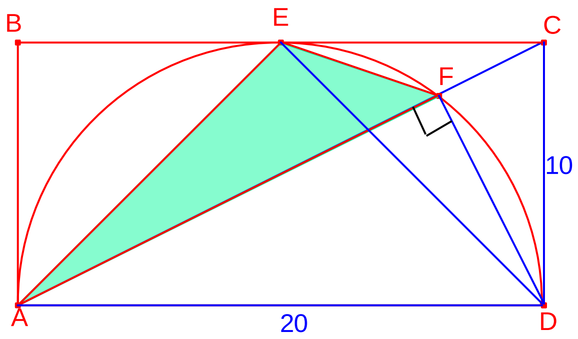
$$= \frac{3}{4}(1+2\Phi)\sin 36°$$

$$\frac{S_{JKDL}}{S_{total}} = \frac{1}{3}$$

5494.- La figura està formada per un rectangle de costats 20 i 10 que conté una semicircumferència. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



angleEFA=45º

AE=DE=10·sqrt(2)

Els triangles ADC, AFD semlants

FD=a, AF=2a

a=4·sqrt(5)

AF=8·sqrt(5)

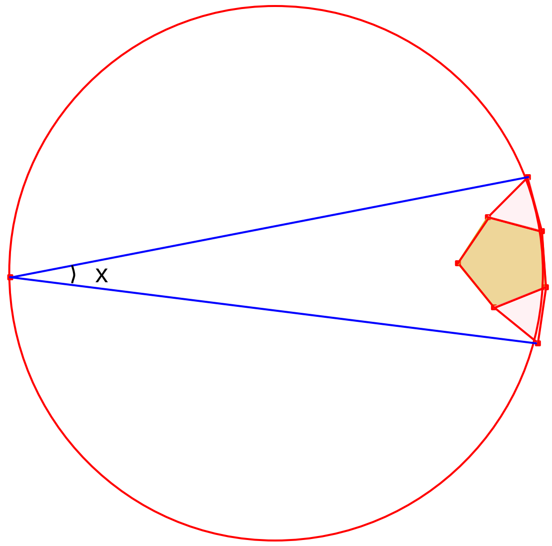
Teorema Tolomeu

20·EF+40·sqrt(10)=80·sqrt(10)

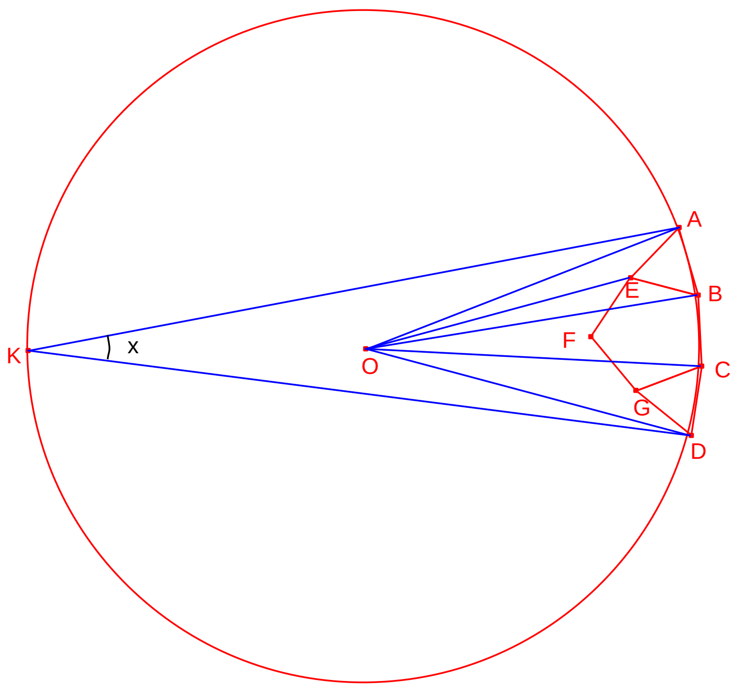
EF=2·sqrt(10)

[AEF]=(1/2)·2·sqrt(10)·8·sqrt(5)·sqrt(2)/2=40

5495.- La figura està formada per un pentàgon regular, dos triangles equilàters i una circumferència que passa per quatre vèrtexs. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleABC=60º+108º=168º

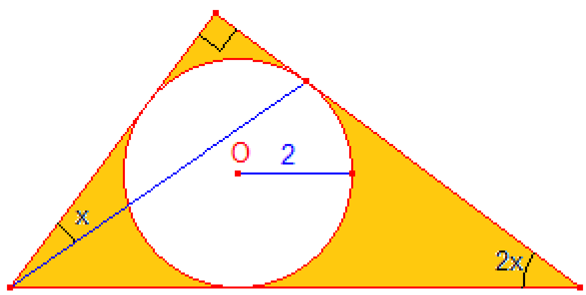
angleAOC=360º-2·168º)=24º

angleAOB=(1/2)anggleAOC=12º

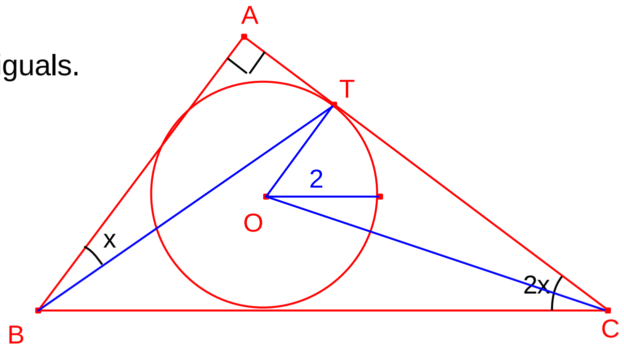
angleAOD=24º+12º=36º

x=angleAKD=(1/2)36º=18º

5496.- La figura està formada per un triangle rectangle i la seua circumferència inscrita que té radi 2.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
$\angle ABT = \angle TCO = x$
$\overline{OT} = \overline{AT} = 2$



Aleshores, els triangles rectangles $B\overset{\Delta}{A}T, C\overset{\Delta}{T}O$ són iguals.
Siga $\overline{AB} = \overline{CT} = c$

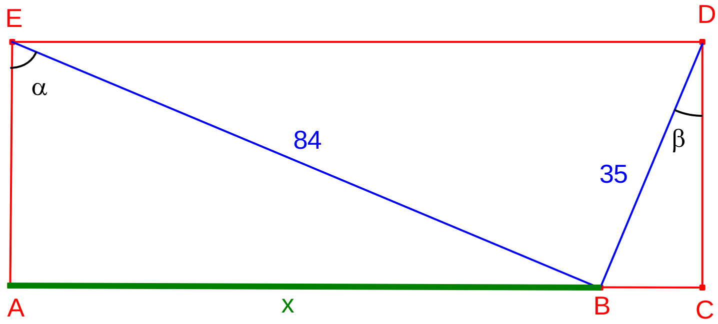
$$\tan 2x = \frac{c}{2+c} = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{2}{c}}{1 - \frac{4}{c^2}} = \frac{4c}{c^2 - 4}$$

$$\frac{1}{2+c} = \frac{4}{c^2 - 4}$$

$c^2 - 4c - 12 = 0$
Resolent l'equació:
$c = 6$
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = \frac{1}{2} c \cdot (c+2) - \pi \cdot 2^2 = 24 - 4\pi \approx 11.4336$$

5497.- La figura està formada per un rectangle que conté dos segments de longituds 84, 35 i els angles $\alpha + \beta = 90°$
Calculeu la mesura del segment $\overline{AB} = x$



Solució:
$\angle EBD = \alpha + \beta = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $E\overset{\Delta}{B}D$:

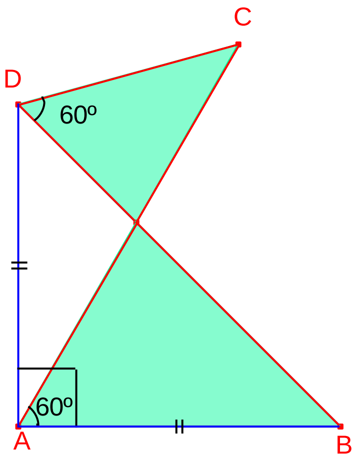
$DE = \sqrt{84^2 + 35^2} = 91$

Els triangles rectangles $E\overset{\Delta}{B}D, B\overset{\Delta}{A}E$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

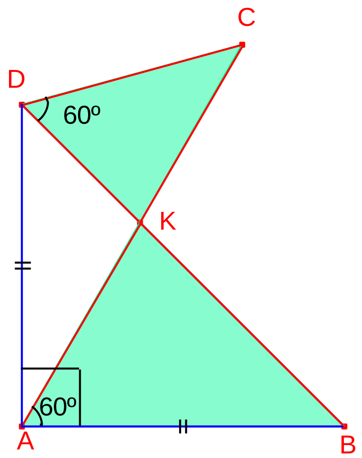
$$\frac{x}{84} = \frac{84}{91}$$

$$x = \frac{12 \cdot 84}{13} = \frac{1008}{13} \approx 77.5385$$

5498.- En la figura, $\overline{BD} = 20, \overline{CD} = 10, \overline{AB} = \overline{AD}$, $\angle CDB = \angle CAB = 60°, \angle DAB = 90°$.
Calculeu l'àrea ombrejada.

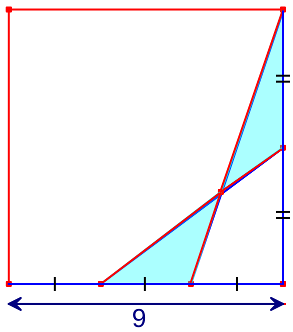


Solució:
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles:
$\overline{AB} = \overline{AD} = 10\sqrt{2}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{DCK}$ són semblants i de raó:
$\overline{AB} : \overline{CD} = \sqrt{2} : 1$

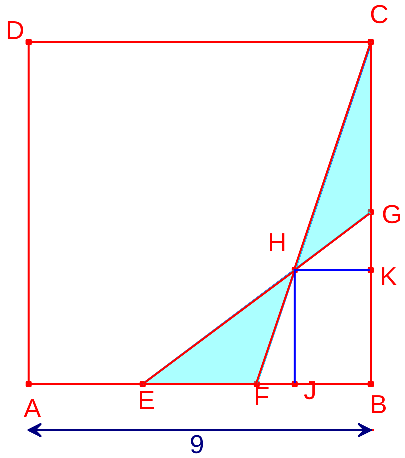


Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$,:
$$\frac{\overline{AK}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$
$\overline{AK} = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50(3 - \sqrt{3})$$
$$S_{CDK} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABK} = 25(3 - \sqrt{3})$$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 75(3 - \sqrt{3}) \approx 95.0962$

5499.- La figura està formada per un quadrat de costat 9.
Un costat s’ha dividit en tres parts iguals i un altre contigu en dues parts iguals.
Calculeu l’àrea ombrejada.



Solució:



JH=3x, EJ=4x
HK=6-4x

CK=9-3x

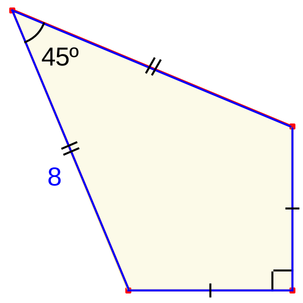
(6-4x)/(9-3x)=1/3

x=1

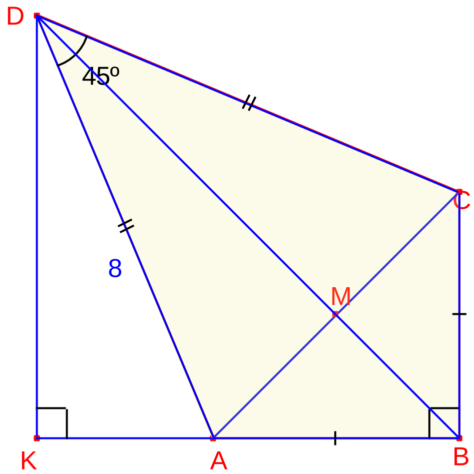
HJ=3, HK=2

[EFH]+[CGH]=(3·3)/2+(9/2·2)/2=9

5500.- La figura està formada per un cometa.
Calculeu la seua àrea.



Solució:
Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = a$
$\overline{AC} = a\sqrt{2}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DKA}, \overset{\Delta}{DMA}$ són iguals.

$$\overline{KA} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\overline{KD} = \overline{KB} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$$

$$\overline{BD} = \overline{KB} \cdot \sqrt{2} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} \cdot a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKA}$:

$$\frac{1}{2}a^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a^2 = 64$$

$$\left(2 + \sqrt{2}\right)a^2 = 64$$

L'àrea del cometa és:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} \cdot a = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right)a^2 = 32$$