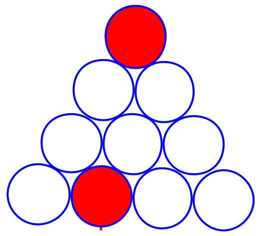
Ricard Peiró i Estruch

Problemes de Geometria per a l'ESO 56

551.- Deu cercles d'igual radi r estan apilats.
Determineu la mínima distància entre els cercles ombrejats.



Solució:

Els centres dels cercles vèrtexs són vèrtexs d'un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 6r$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$\overline{MC} = 3r\sqrt{3}$.

Siguen C i P els centres del cercles ombrejats.

$\overline{PM} = r$

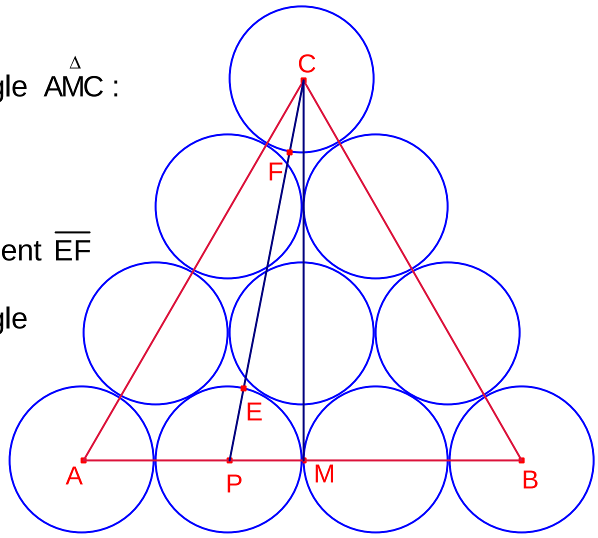
La distància mínima és igual a la mesura del segment $\overline{EF}$ que es troba en la recta PC.

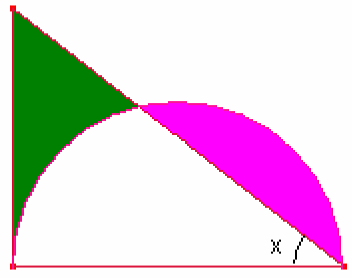
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMC}$:

$\overline{PC} = \sqrt{r^2 + \left(3r\sqrt{3}\right)^2} = 2r\sqrt{7}$.

$\overline{PE} = \overline{CF} = r$.

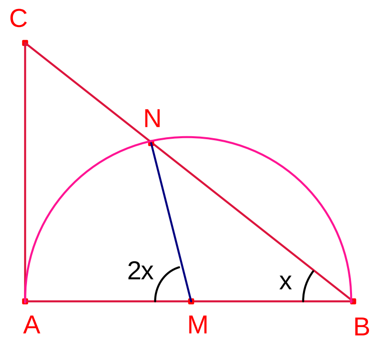
$\overline{EF} = \overline{PC} - 2 \cdot \overline{PE} = 2r\sqrt{7} - 2r = 2r\left(\sqrt{7} - 1\right)$.





552.- Sobre un catet d'un triangle rectangle s'ha dibuixat una semicircumferència.
Determineu el valor $\text{tg } x$ si les dues regions ombrejades tenen la mateixa àrea.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga M el punt mig del catet $\overline{AB}$, centre de la semicircumferència.
Siga N la intersecció de la semicircumferència i la hipotenusa $\overline{BC}$.
Per ser angle central $\angle AMN = 2x$, $\angle BMN = \pi - 2x$.
Siga $\overline{AB} = 2r$, $\overline{AC} = b$.

L'àrea de la zona ombrejada que conté el vèrtex C és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys la suma de les àrees del sector AMN i el triangle $\overset{\Delta}{BMN}$.

$$S_1 = \frac{1}{2}2rb - \frac{1}{2}2x \cdot r^2 - S_{BMN}.$$

L'àrea de l'altra zona ombrejada és igual a l'àrea del sector BMN menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BMN}$.

$$S_2 = \frac{1}{2}(\pi - 2x) \cdot r^2 - S_{BMN}.$$

Com les dues àrees són iguals:

$$\frac{1}{2}2rb - \frac{1}{2}2x \cdot r^2 - S_{BMN} = \frac{1}{2}(\pi - 2x)r^2 - S_{BMN}.$$

Simplificant:

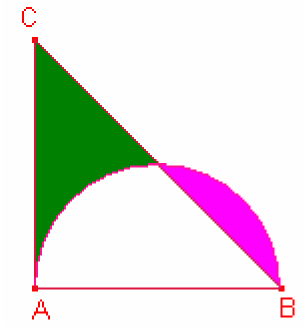
$$rb = \frac{\pi}{2}r^2.$$

$$b = \frac{\pi}{2}r.$$

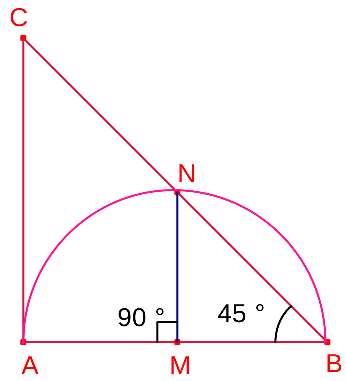
$$\text{tg } x = \frac{b}{2r} = \frac{\frac{\pi}{2}r}{2r} = \frac{\pi}{4}.$$

$$x = \text{arctg}\frac{\pi}{4} \approx 38^{o}9'.$$

553.- Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$.
Sobre el catet $\overline{AB}$ com diàmetre s'ha dibuixat una semicircumferència.
Determineu la raó de proporcionalitat entre les àrees de les dues regions ombrejades.



Solució:
Siga M el punt mig del catet $\overline{AB}$, centre de la semicircumferència.
Siga N la intersecció de la semicircumferència i la hipotenusa $\overline{BC}$.
Per ser angle central $\angle AMN = 90^{o}$.
Siga $\overline{AB} = 2r$, $\overline{AC} = 2r$.
Els segments circulars AN i BN són iguals.



El segment circular BN és igual a l'àrea d'un quadrat de circumferència menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BNM}$.

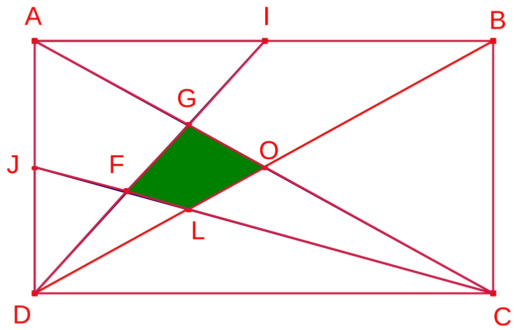
$S_1 = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{r^2}{2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)r^2$.

L'àrea de la zona ombrejada que conté el vèrtex C és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANC}$ menys el segment circular AN.

$S_2 = 2\frac{1}{2}r^2 - S_1 = r^2 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)r^2 = \frac{1}{4}r^2(6-\pi)$.

La raó de proporcionalitat entre les àrees és:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{4}(\pi - 2)r^2}{\frac{1}{4}(6-\pi)r^2} = \frac{\pi - 2}{6 - \pi} \approx 0'3994 .$$



554.- Siga ABCD un rectangle de centre O.
Siga I el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga J el punt mig del costat $\overline{AD}$.
Siga G la intersecció de les rectes AC i DI.
Siga L la intersecció de les rectes BD i CJ.
Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter GOLF i el rectangle ABCD.

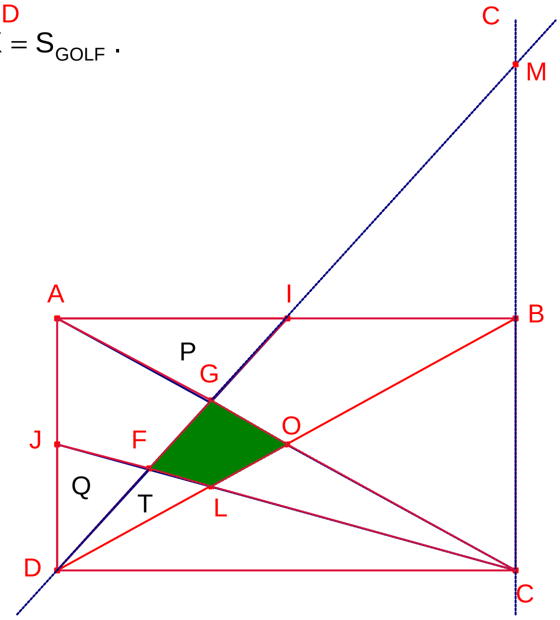
Solució:
Siga $S=S_{ABCD}$, $P=S_{AIG}$, $Q=S_{DFJ}$, $T=S_{DLF}$. Siga $X=S_{GOLF}$.

$$S_{OBIG}=S_{ABO}-P=\frac{1}{4}S-P.$$

$$S_{DCL}=S_{DCJ}-Q-T=\frac{1}{4}S-Q-T.$$

$$S_{COL}=S_{DCO}-S_{DCL}=\frac{1}{4}S-\left(\frac{1}{4}S-Q-T\right)=Q+T.$$

$$X=S_{GOLF}=S_{BID}-T-S_{OBIG}=P-T \qquad (1)$$



Els triangles $\overset{\Delta}{DCG}$, $\overset{\Delta}{IGA}$ són semblants i la raó de semblança és 2:1. Aplicant el teorema de Tales:

$$X+T+\frac{1}{4}S-Q-T+Q+T=2^2P.$$

$$X+T+\frac{1}{4}S=4P \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$P-T+T+\frac{1}{4}S=4P$. Resolent l'equació:

$$P=\frac{1}{12}S \qquad (3)$$

Anàlogament, $Q+T=\frac{1}{12}S$ (4)

Les rectes DI i BC s'intersecten en el punt M.

Els triangles $\overset{\Delta}{DCM}$, $\overset{\Delta}{IBM}$ són semblants i la raó de semblança és 2:1.

Aleshores $\overline{BC}=\overline{BM}$. $S_{IBM}=\frac{1}{4}S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CMF}$, $\overset{\Delta}{JDF}$ són semblants i la raó de semblança és 4:1.

$$X+S_{IBM}+S_{IBOG}+S_{CLO}=4^2S_{JDF}.$$

$$X+\frac{3}{4}S=16Q \qquad (5)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (5):

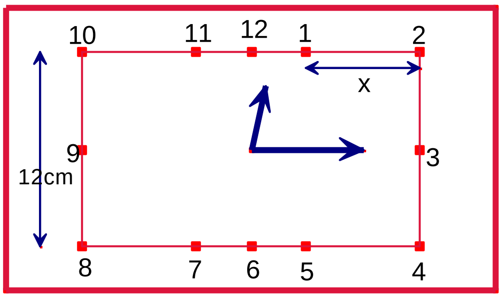
$$16Q+T=\frac{7}{12}S \qquad (6)$$

Resolent el sistema format per les expressions (4) (6):

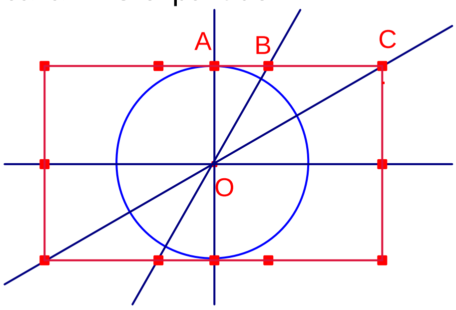
$Q=\frac{1}{20}S$. Aleshores, $X=16Q-\frac{3}{4}S=\frac{1}{20}S$.

Aleshores, $\frac{S_{GOLG}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{20}$.

555.- Un rellotge de paret és rectangular, com es veu al dibuix.
Quina és en centímetres, la distància x entre les posicions del número 1 i el 2 si la distància entre les 8 i les 10 és de 12cm.
Prova Cangur 2012. Nivell 4, problema 19.



Solució:
Siga la circumferència de centre O, el centre del rectangle i tangent al costats grans.
Siga A el punt que marca les 12, B el punt del rectangle que marca la 1 i C el punt del rectangle que marca les 2.



$\angle AOB = \dfrac{360^o}{12} = 30^o$, $\angle ABC = \dfrac{360^o}{12} 2 = 60^o$.

$\overline{BC} = x$

$\overline{OA} = 6$.

$\overline{OC} = 2 \cdot \overline{OA} = 12$.

$\overline{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{OC} = 6\sqrt{3}$.

La recta OB és bisectriu de l'angle $\angle AOC$ del triangle $\overset{\Delta}{AOC}$.
Aplicant la propietat de la bisectriu:

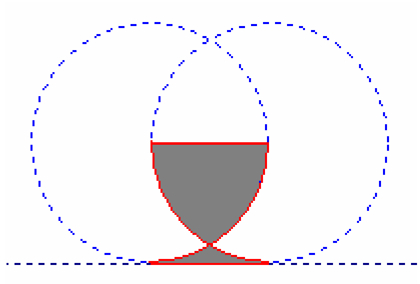
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{OC}}$.

$\dfrac{6\sqrt{3} - x}{6} = \dfrac{x}{12}$.

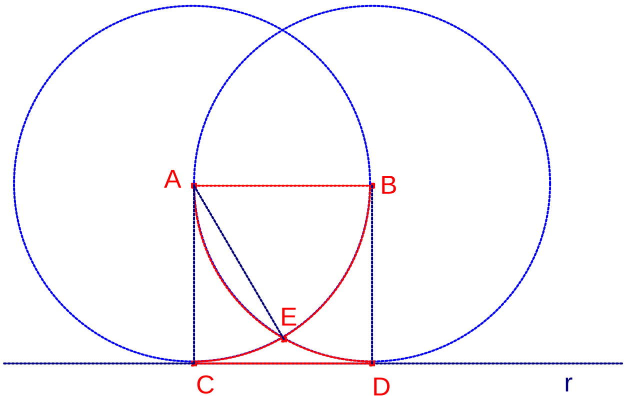
Resolent l'equació:

$x = 4\sqrt{3} \approx 6'93\text{cm}$.

556.- Dos cercles de radi 1 estan dibuixat de tal manera que el centre de cadascun d'ells passa per l'altre cercle.
Determineu l'àrea de la regió en forma de copa formada pel radi comú als dos cercles, les circumferències i una de les rectes tangents als dos cercles.
Crux Mathematicorum M499.



Solució:

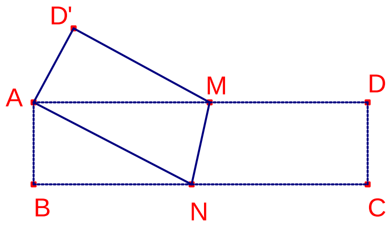


Siguen A, B els centres dels dos cercles i C, D els punts de tangència de les dues circumferències amb la recta r.
ABCD és un quadrat de costat 1.
Siga E la intersecció de les dues circumferències interior al quadrat ABCD.
$\angle CAE = 30^{o}$.

L'àrea de la copa és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys dues vegades l'àrea del sector circular CAE més dues vegades l'àrea del segments circular de corda AE.

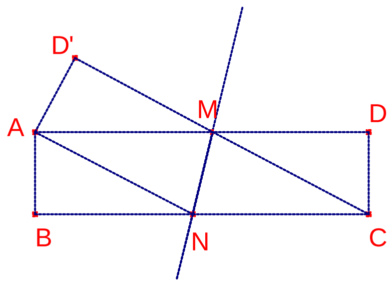
$$S_{Copa} = 1^2 - 2\cdot\frac{1}{12}\pi\cdot 1^2 + 2\left(\frac{1}{6}\pi\cdot 1^2 - \frac{1^2\sqrt{3}}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

557.- Un rectangle de paper ABCD de $4\text{cm}\times 16\text{cm}$ es doblega sobre la línia MN, de manera que el vèrtex C es fa coincidir en el vèrtex A, com es veu al dibuix.
a) Quina és l'àrea del quadrilàter ANMD'.
b) Quina és l'àrea del pentàgon ABNMD'
Proves Cangur 2012, nivell 4, problema 5.



Solució:
a)
La recta MN és mediatriu del segment $\overline{AC}$.
Els quadrilàters NCDM, NAD'M són simètrics, respecte de la recta MN.
Aleshores, $\overline{AM}=\overline{CM}$, $\overline{DM}=\overline{D'M}$.

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDM}$, $\overset{\Delta}{AD'M}$ són iguals.
C, M, D' estan alineats.
Aleshores, $\overline{CM}$ és paral·lel a $\overline{AN}$, $\overline{AM}$ és paral·lel a $\overline{CN}$.
Per tant, NCMA és un paral·lelogram, aleshores, $\overline{AM}=\overline{CN}$.
Per tant, els quadrilàter NCDM i MABN són iguals.



Aleshores, $S_{NCDM}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}4\cdot 16=32$

$S_{ANMD'}=S_{NCDM}=32\text{cm}^2$.

b)
Siga $x=\overline{DM}=\overline{D'M}$, $\overline{AM}=16-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD'}$.
$4^2+x^2=(16-x)^2$. Resolent l'equació:

$x=\frac{15}{2}$.

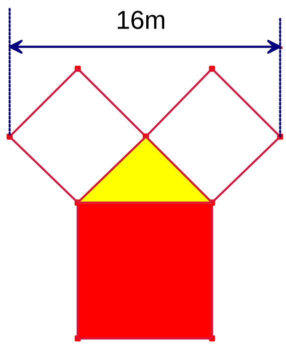
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMD'}$ és:

$$S_{AMD'}=\frac{4\frac{15}{2}}{2}=15.$$

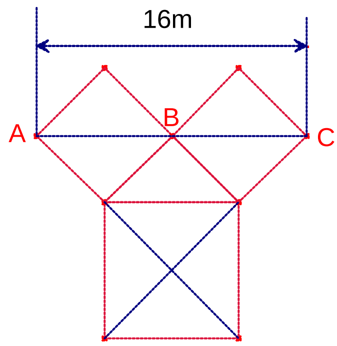
L'àrea del pentàgon ABNMD' és:

$S_{ABNMD'}=S_{ABNM}+S_{AMD'}=32+15=47\text{cm}^2$.

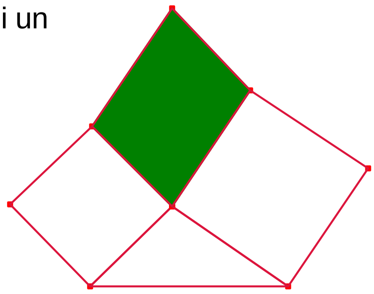
558.- El dibuix representa el plànol d'un jardí.
Als quadrats iguals s'ha plantat roses blanques, al quadrat gran, roses vermelles i al triangle rectangle roses grogues.
Quina és la regió plantada de roses?
Proves Cangur 2012, Nivell 4, problema 15.



Solució:
$\overline{AB} = \overline{BC} = 8$.
El jardí s'ha dividit en 9 triangles rectangle isòsceles d'hipotenusa 8m.
L'àrea del triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa 8m és 16m^2.
L'àrea total és:
$S = 9 \cdot 16 = 144\text{m}^2$.

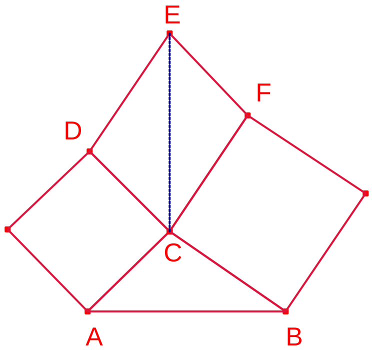


559.- La figura està formada per dos quadrats de costats 4, 5 i un triangle de costats 4, 5, 7 i un paral·lelogram (ombrejat).
Calculeu l'àrea del paral·lelogram.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $a = 5, b = 4, c = 7$.
Siga el paral·lelogram CDEF.
$\angle DCF = 180^{o} - \angle ACB$.
Els angles (no oposats) d'un paral·lelogram són suplementaris.
$\angle CDE = 180^{o} - \angle DCF = \angle ACB$.
$\overline{CD} = \overline{AC}$, $\overline{CF} = \overline{BC}$.



Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CDE}$ són iguals.
Per tant, l'àrea del paral·lelogram CDEF és igual al doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

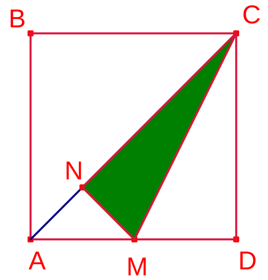
Utilitzant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(4+5+7)(-4+5+7)(4-5+7)(4+5-7)}}{4} = 4\sqrt{6}.$$

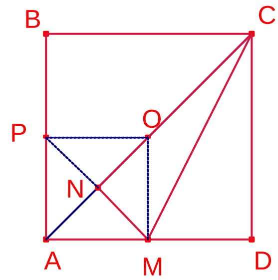
Aleshores, l'àrea del paral·lelogram CDEF és:

$$S_{CDEF} = 2 \cdot S_{ABC} = 8\sqrt{6}.$$

560.- Calculeu la raó entre l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNC}$ i l'àrea del quadrat ABCD, si M és el punt mig del costat $\overline{AD}$ i MN és perpendicular a AC.
Proves Cangur 2012, Nivell 2, problema 22.



Solució:
Siga S l'àrea del quadrat ABCD.
Siga O el centre del quadrat.



La recta MN talla el costat $\overline{AB}$ en el punt mig P del costat.
L'àrea del quadrat AMOP és la quarta part de l'àrea del quadrat ABCD.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ és igual a la quarta part de l'àrea del quadrat AMOP.

$$S_{AMN} = \frac{1}{16} S .$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMC}$ és igual a la quarta e l'àrea del quadrat ABCD.

$$S_{AMC} = \frac{1}{4} S$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNC}$ és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMC}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMN}$, aleshores:

$$S_{MNC} = S_{AMC} + S_{AMN} = \frac{1}{4} S - \frac{1}{16} S = \frac{3}{16} S .$$

$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{16} .$$