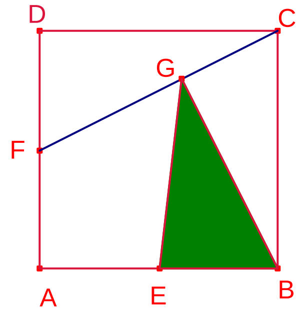
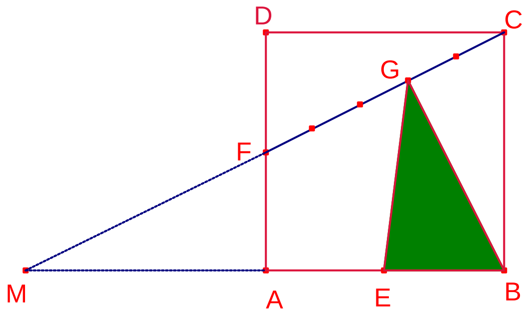
Problemes de Geometria per a l'ESO 57

561.- Els costats del quadrat ABCD mesuren 2m.
E i F són els punts mitjans dels segments $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, respectivament.
G és un punt sobre $\overline{CF}$, de manera que $3 \cdot \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GF}$.



Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BEG}$
Proves Cangur 2012, Nivell 4, problema 18.

Solució 1:
Les rectes CF, AB s'intersecten en el punt M.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDF}$, $\overset{\Delta}{MAF}$ són iguals, aleshores:
$\overline{CF} = \overline{MF}$, $\overline{MA} = \overline{CD} = 2$.
$\overline{BM} = \overline{AM} + \overline{AB} = 4$.

$$S_{MBC} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 2.$$

Si $3 \cdot \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GF}$. aleshores, $\overline{CG} = \frac{2}{5}\overline{CF}$.

$\overline{CG} = \frac{1}{5}\overline{CM}$, aleshores: $\overline{MG} = \frac{4}{5}\overline{CM}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$$\frac{S_{MBG}}{S_{MBC}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{CM}} = \frac{4}{5}.$$

Aleshores, $S_{MBG} = \frac{4}{5} S_{MBC} = \frac{16}{5}$.

$$\frac{S_{BEG}}{S_{MBG}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{MB}} = \frac{1}{4}.$$

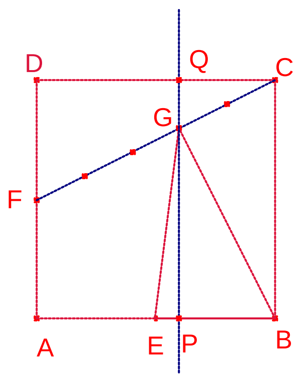
Aleshores, $S_{BEG} = \frac{1}{4} S_{MBG} = \frac{1}{4}\frac{16}{5} = \frac{4}{5} = 0'8m^2$.

Solució 2:
Siga P i Q les projeccions de G sobre $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, respectivament:
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CQG}$, $\overset{\Delta}{CDF}$ són semblants i la raó de semblança és 2:5.

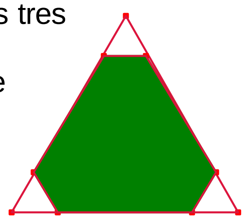
Aleshores, $\frac{\overline{QG}}{\overline{DF}} = \frac{2}{5}$, per tant, $\overline{QG} = \frac{2}{5}$.

$\overline{GP} = \overline{AD} - \overline{QG} = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$.

$$S_{BEG} = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{GP}}{2} = \frac{1 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5} = 0'8m^2.$$

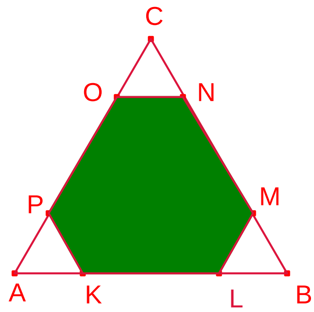


562.- En un triangle equilàter de costat 6cm tallem, en els seus vèrtexs tres triangles equilàters de la mateixa mida.
La suma dels perímetres dels tres triangles tallats és igual al perímetre de l'hexàgon que en resulta (veure figura)
Quina és la longitud de cada costat dels triangles petits?.
Proves Cangur 2012, Nivell 2, problema 16.

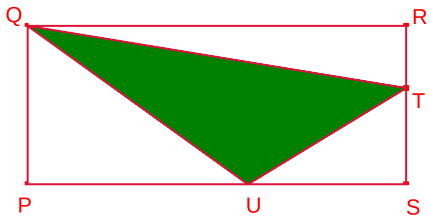


Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = 5$.
Siga KLMNOP l'hexàgon formant tallant els vèrtexs del triangle equilàter anterior.
Siga $\overline{AK} = \overline{AP} = \overline{BL} = \overline{BM} = \overline{CN} = \overline{CO} = x$, longitud dels costats del 3 triangles equilàters.



$\overline{KL} = \overline{MN} = \overline{OP} = 6-2x$.
$\overline{LM} = \overline{NO} = \overline{PK} = x$.
La suma dels perímetres dels tres triangles equilàter tallats és $9x$.
El perímetre de l'hexàgon és $3(6-2x)+3x$.
Aleshores:
$9x = 3(6-2x)+3x$.
$12x = 18$.
$x = \frac{3}{2} = 1'5cm$.



563.- PQRS és un rectangle.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QRT}$ és $\frac{1}{5}$ de l'àrea de PQRS, i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{TSU}$ és $\frac{1}{8}$ de l'àrea de PQRS.

Quina fracció de l'àrea del rectangle PQRS és l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QTU}$.

UKMT 2011, senior, problema 16.

Solució:

Siguen $a=\overline{PS}=\overline{QR}$, $b=\overline{PQ}=\overline{RS}$ costats del rectangle.

L'àrea del rectangle PQRS és:

$S_{PQRS}=ab$.

Siga $x=\overline{RT}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QRT}$ és $\frac{1}{5}$ de l'àrea de PQRS, aleshores:

$$\frac{ax}{2}=\frac{1}{5}ab.$$

Aleshores, $x=\overline{RT}=\frac{2}{5}b$. $\overline{ST}=b-\overline{RT}=\frac{3}{5}b$.

Siga $y=\overline{SU}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{TSU}$ és $\frac{1}{8}$ de l'àrea de PQRS, aleshores:

$$\frac{y\frac{3}{5}b}{2}=\frac{1}{8}ab.$$

Aleshores, $y=\overline{SU}=\frac{5}{12}a$. $\overline{PU}=a-\overline{SU}=\frac{7}{12}a$.

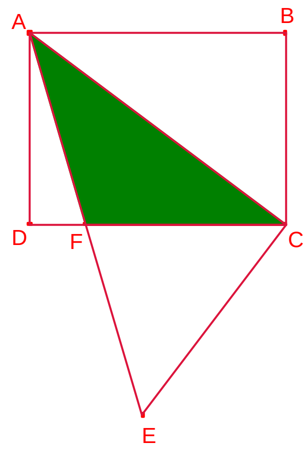
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQU}$ és:

$$S_{PQU}=\frac{\frac{7}{12}ab}{2}=\frac{7}{24}ab.$$

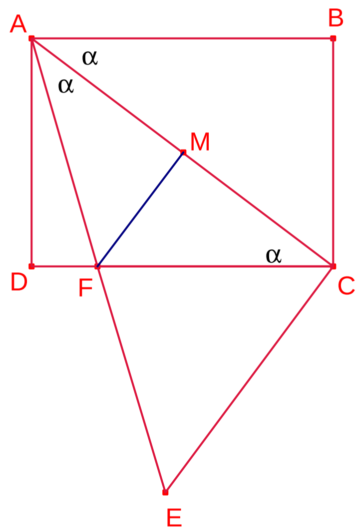
$$S_{QTU}=S_{PQRS}-(S_{QRT}+S_{TSU}+S_{PQU})$$

$$S_{QTU}=ab-\left(\frac{1}{5}ab+\frac{1}{8}ab+\frac{7}{24}ab\right)=\frac{23}{60}ab.$$

$$\frac{S_{QTU}}{S_{PQRS}}=\frac{23}{60}.$$



564.- En la figura, ABCD un rectangle tal que $\overline{AB}=16$ i $\overline{BC}=12$. $\angle ACE=90^o$ i $\overline{CE}=15$.
Les rectes AE i CD es tallen en el punt F.
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACF}$.



Solució:
Siga $\alpha=\angle BAC$, aleshores, $\angle DCA=\alpha$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}=20$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACE}$ són semblants ja que els catets són proporcionals:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}=\frac{3}{4}.$$

Aleshores, $\angle CAE=\alpha$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACF}$ és isòsceles.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AC}$.
$\angle FMC=90^o$, $\overline{CM}=10$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CMF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

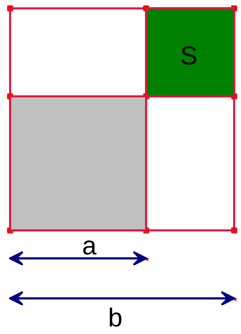
$$\frac{\overline{FM}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{4}.$$ Aleshores:

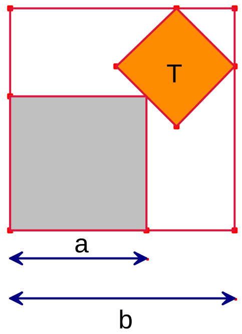
$$\overline{FM}=10\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACF}$ és:

$$S_{ACF}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{FM}}{2}=\frac{20\cdot\frac{15}{2}}{2}=75.$$

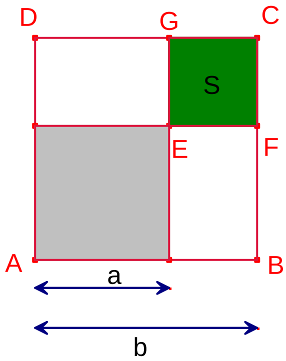
565.- Siguen els quadrats S i T dibuixats fora del quadrat de costat a i dins del quadrat de costat b.
En el quadrat de l'esquerra els costats del quadrat S són paral·lels al quadrat dels altres dos quadrats.
En el quadrat de la dreta els costats del quadrat S són paral·lels a les diagonals dels altres dos quadrats.
Determineu la proporció entre les àrees dels quadrats S i T.



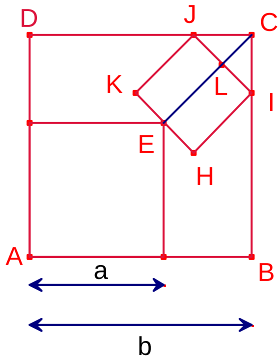


Solució:

El costat del quadrat S és $\overline{EF}=b-a$.
L'àrea del quadrat S és:
$S_S=(b-a)^2$.



$\overline{AE}=a\sqrt{2}$.
$\overline{AC}=b\sqrt{2}$.
$\overline{CE}=\overline{AC}-\overline{AE}=(b-a)\sqrt{2}$.
Siga $x=\overline{HI}=\overline{IJ}$ costats del quadrat T.
Siga L el punt mig del costat $\overline{IJ}$ del quadrat T



$\overline{IL}=\overline{CL}=\frac{x}{2}$.

$\overline{CE}=\overline{EL}+\overline{CL}=x+\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x$.

$(b-a)\sqrt{2}=\frac{3}{2}x$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$x=\frac{2\sqrt{2}}{3}(b-a)$.

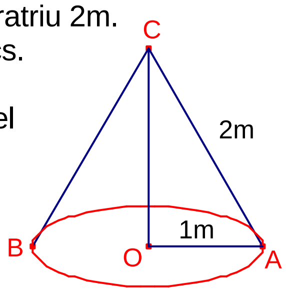
L'àrea del quadrat T és:

$S_T=x^2=\frac{8}{9}(b-a)^2$.

Aleshores la proporció entre les àrees dels quadrats S i T és:

$$\frac{S_S}{S_T}=\frac{(b-a)^2}{\frac{8}{9}(b-a)^2}=\frac{9}{8}.$$

566.- Dos cucs de la seda han discutit qui arriba primer a casa des d'un punt que es troba en la base d'una con recte de base circular de 1m de radi i generatriu 2m.
La casa es troba en el punt diametralment oposat on es troben els cucs.



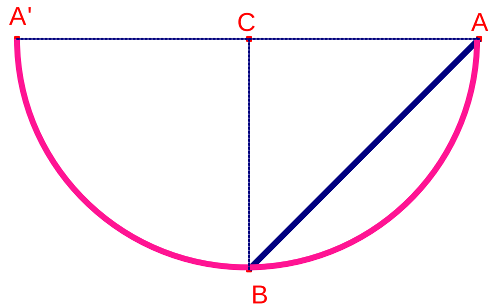
Un dels cucs de nom Astut sap calcular el camí més curt, mentre que el seu germà Xiroi escull el camí de la base del con.

Si Astut tarda 3 minuts en pensar la trajectòria més curta i tots dos van a una velocitat de 1mm/s, quin dels dos cucs arriba primer.

Solució.
Suposem que els cucs es troben en el punt A de la base del con.
La casa es troba en el punt B diametralment oposat a A.

Xiroi recorre una distància igual a mitja circumferència de radi $\overline{OA} = 1000\text{mm}$.
El temps que tarda Xiroi en fer el recorregut és:
$$t = \frac{1000\pi\text{ mm}}{1\text{mm/s}} \approx 3142\text{s}.$$

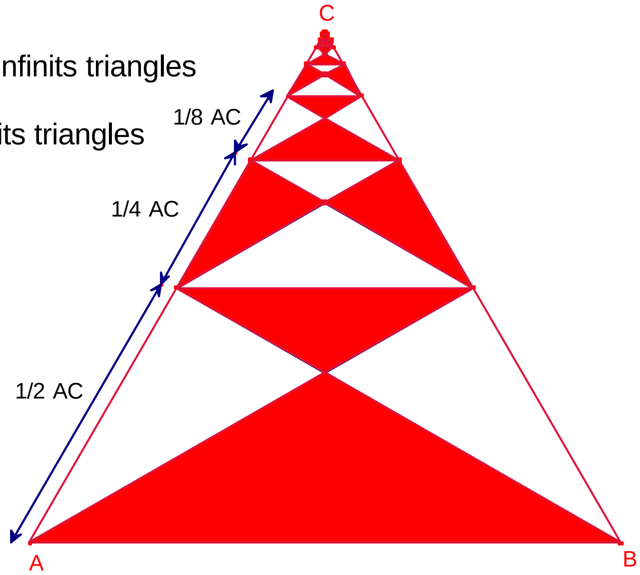
Astut fa el camí més curt que és la línia recta que uneix A i B en el desenvolupament de la cara lateral del con.



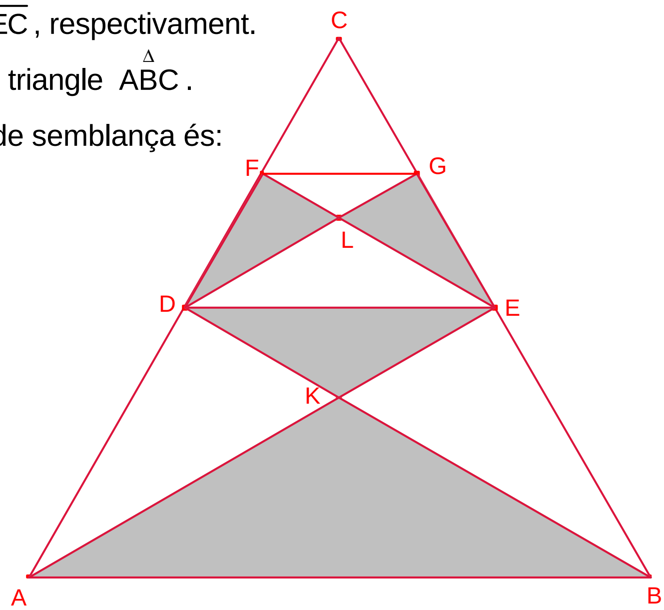
El desenvolupament de la cara lateral del con és un sector circular de centre C el vèrtex del con i radi $\overline{CA} = 2000\text{mm}$ la generatriu del con i un arc ABA' que és igual a la longitud de la circumferència de la base.
La casa és troba en la meitat de l'arc ABA'.
Calculem l'angle $\alpha = \angle ACA'$ del sector.
La longitud de l'arc ABA' és:

$$\overset{\frown}{ABA'} = 2\pi \cdot 1000\text{ mm} = 2\pi \cdot 2000\frac{\alpha}{360^{\circ}}\text{mm}.$$
Resolent l'equació:
$\alpha = 180^{\circ}$.
Aleshores, $\angle ACB = 90^{\circ}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{AB} = 2000\sqrt{2}$.
El temps que tarda Astut en fer el recorregut és:
$$t' = 3\text{min} \cdot 60\text{s/min} + \frac{2000\sqrt{2}\text{ mm}}{1\text{mm/s}} \approx 3008\text{s}.$$
Aleshores, arriba primer Astut.

567.- El triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ s'ha dividit en infinits triangles com descriu la figura.
Calculeu la proporció entre les àrees dels infinits triangles ombrejats i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Olimpíada València 2012 nivell B.



Solució:
Siguen D, E els punts migs dels costats $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, respectivament.
Siguen F, G els punts migs dels segments $\overline{DC}$, $\overline{EC}$, respectivament.
Siga K la intersecció de les mitjanes $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FGC}$ són semblants i la raó de semblança és:
$\frac{\overline{FC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{4}$.



Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}S.$$

$$S_{ADK} = \frac{1}{3}S_{ABD} = \frac{1}{6}S.$$

$$S_{ABK} = \frac{2}{3}S_{ABD} = \frac{1}{3}S.$$

$$S_{DEK} = \frac{1}{4}S_{ABK} = \frac{1}{12}S.$$

$$S_{DFL} = \frac{1}{4}S_{ADK} = \frac{1}{24}S$$

La figura que és autosemblant és la formada per la suma dels triangles $\overset{\Delta}{ABK}$, $\overset{\Delta}{DEK}$, $\overset{\Delta}{DFL}$, $\overset{\Delta}{EGL}$. La raó de semblança és $\frac{1}{4}$.
La suma de les àrees dels 4 triangles és:

$$S_{ABK} + S_{DEK} + S_{DFL} + S_{EGL} = \frac{1}{3}S + \frac{1}{12}S + \frac{1}{24}S + \frac{1}{24}S = \frac{1}{2}S.$$

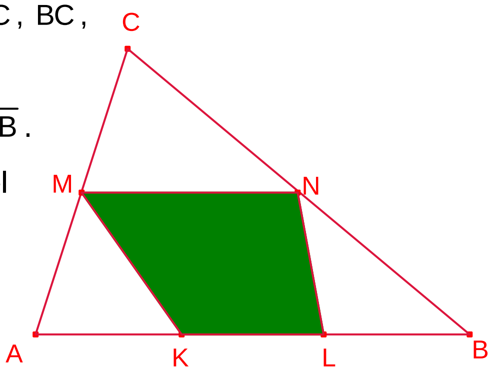
Les àrees formen un progressió geomètrica de primer terme $\frac{1}{2}S$ i raó $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

La suma de les infinites àrees és: $\dfrac{\frac{1}{2}S}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8}{15}S$.

568.- En la figura M i N són els punts migs dels costats $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, respectivament, del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Km L són dos punts del costat $\overline{AB}$, tal que $\overline{AK} = \overline{BL} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

Calculeu la proporció entre les àrees del polígon KLNM i el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



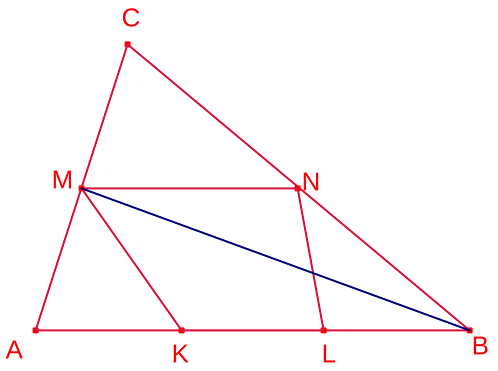
Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}S$.

$S_{AKM} = \frac{1}{3}S_{ABM} = \frac{1}{6}S$

Anàlogament, $S_{LBN} = \frac{1}{6}S$.



Els triangles $\overset{\Delta}{MNC}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i la raó de semblança és 1:2
Aleshores:

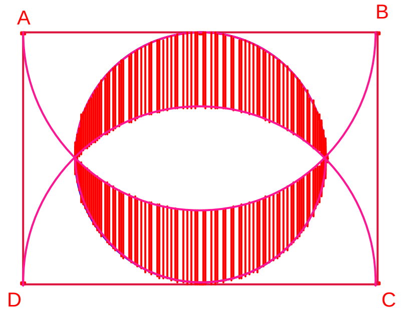
$$S_{MNC} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{ABC} = \frac{1}{4}S.$$

$$S_{KLNM} = S_{ABC} - (S_{AKM} + S_{LBN} + S_{MNC}) = S - \left(\frac{1}{6}S + \frac{1}{6}S + \frac{1}{4}S\right) = \frac{5}{12}S.$$

Aleshores:

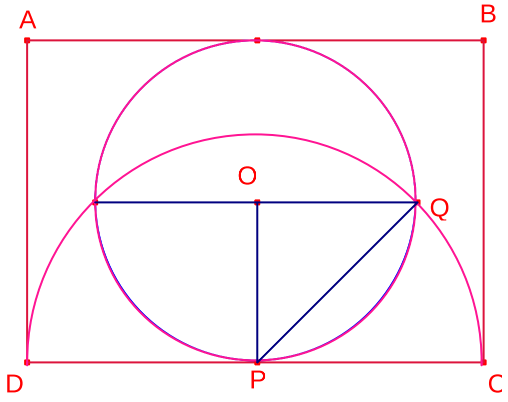
$$\frac{S_{KLNM}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}.$$

569.- Siga ABCD un rectangle tal que $\overline{AB}=\overline{BC}\cdot\sqrt{2}$.
Dibuixem els semicercles de diàmetres $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.
a) Proveu que la circumferència que tangent als costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i centre el centre del rectangle passa per la intersecció dels dos semicercles.
b) Calculeu la suma de l'àrea de les dues lúnules del dibuix.
Sangaku. Presfectura Fukusima, 1883.



Solució:
Siga O el centre del rectangle ABCD.
Siga P el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga Q una de les interseccions del dos semicercles.
Q pertany a la paral·lela mitjana del rectangle ABCD.
Siga $a=\overline{BC}$, aleshores, $\overline{AB}=a\sqrt{2}$.

$\overline{OP}=\frac{a}{2}$. $\overline{PQ}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



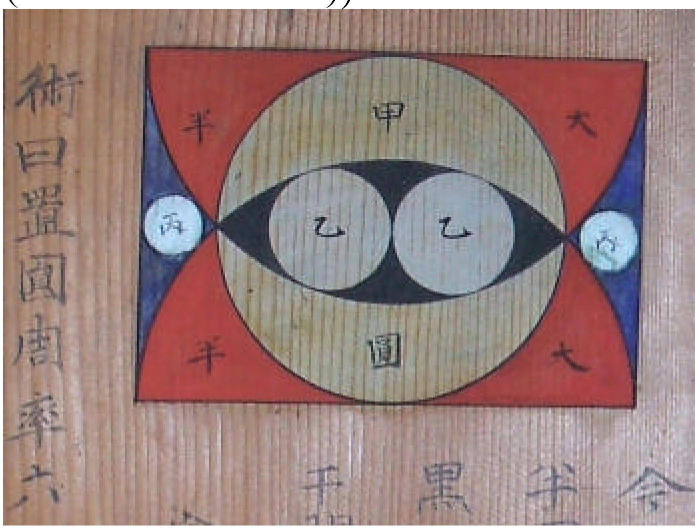
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$\overline{OQ}=\frac{a}{2}$.

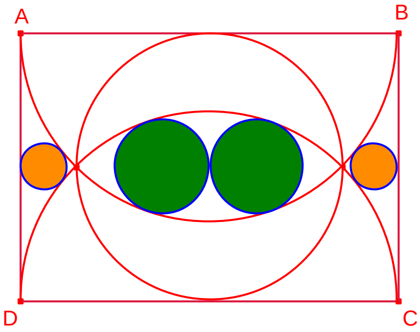
Aleshores, Q pertany al cercle de centre O i tangent als costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és rectangle i isòsceles.
La superfície de una lúnula és igual a la diferència entre les àrees d'un semicercle de radi $\overline{OQ}=\frac{a}{2}$ i d'un segment circular d'un quadrant de radi $\overline{PQ}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Aleshores la suma de les àrees de les dues lúnules és:

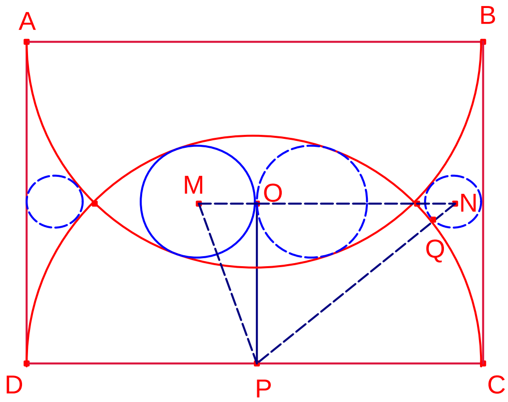
$$S=2\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2}\right)\right)=\frac{a^2}{2}.$$



570.- Siga ABCD un rectangle tal que $\overline{AB}=\overline{BC}\cdot\sqrt{2}$.
Dibuixem els semicercles de diàmetres $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.
a) Calculeu el radi de les dues circumferències iguals i tangents interiors a les dues semicircumferències.
b) Calculeu el radi de les dues circumferències iguals i tangents exterior a les dues semicircumferències i als costats del rectangle.
c) Calculeu la proporció entre els dos radis.



Solució:
Siga O el centre del rectangle ABCD.
Siga P el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga $a=\overline{BC}$, aleshores, $\overline{AB}=a\sqrt{2}$.
Siga M el centre d'una de les dues circumferències tangents interiors.
Siga $r=\overline{OM}$ el seu radi.



$$\overline{OP}=\frac{a}{2}.\quad \overline{PC}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{PM}=\overline{PC}-\overline{OM}=\frac{a\sqrt{2}}{2}-r.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPM}$:

$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-r\right)^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Resolent l'equació: $r=\frac{a\sqrt{2}}{8}$.

Siga N el centre d'una de les dues circumferències tangents exteriors.
Siga $s=\overline{OQ}$ el seu radi.

$$\overline{PN}=\overline{PC}+\overline{OQ}=\frac{a\sqrt{2}}{2}+s.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPM}$:

$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}+s\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-s\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Resolent l'equació: $s=\frac{a\sqrt{2}}{16}$.

La proporció entre els radis és: $\frac{r}{s}=2$.