Problemes de Geometria per a l'ESO 58

571.- Un ventall japonés circular té inscrit un triangle equilàter i s'han dibuixat dos triangles equilàters com els de la figura.
Calculeu la raó entre els costats dels dos tipus triangles equilàters.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi r.

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter inscrit en la circumferència.

Siga D el punt mig del costat $\overline{AC}$.

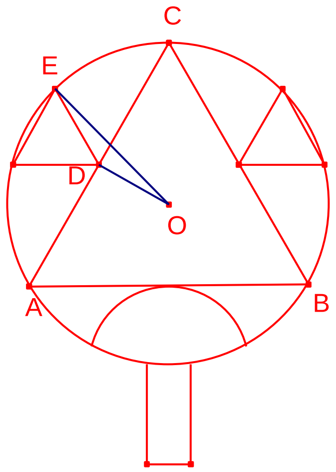
Siga $c = \overline{AC}$ el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $d = \overline{DE}$ el costat d'un dels triangles equilàters menuts.

$\overline{OA} = r$, $\overline{OD} = \frac{r}{2}$. Aleshores:

$c = \overline{AC} = r\sqrt{3}$.

$\angle EDO = 150^o$, $\overline{OE} = r$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ODE}$:

$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + d^2 - 2\frac{r}{2}d \cdot \cos 150^o.$$

$$r^2 = \frac{r^2}{4} + d^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}rd.$$

Resolent l'equació en la incògnita d:

$$d = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}r.$$

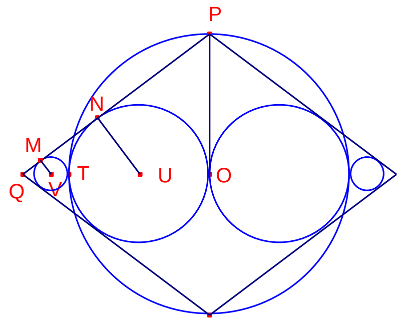
La proporció entre els costats dels dos triangles és:

$$\frac{c}{d} = \frac{r\sqrt{3}}{\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}r} = 1+\sqrt{5} = 2\Phi.$$

572.- En la figura hi ha una circumferència gran de radi r, dues circumferències tangents iguals, un quadrilàter tangent a aquestes dues circumferències i dues circumferències menudes tangents exteriors a la circumferència gran i al quadrilàter.
Calculeu el radi de les circumferències menudes.

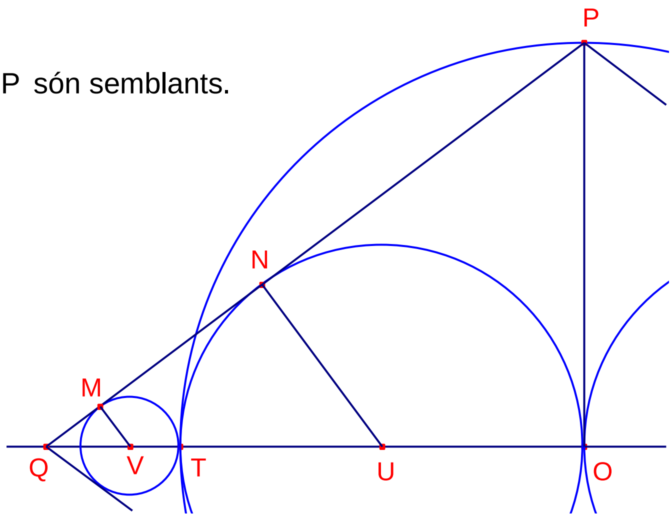
Solució.
Siga O el centre de la circumferència de radi r.
Sigen P, Q dos vèrtexs del quadrilàter.

Siga U el centre d'una de les circumferències mitjanes de radi $\frac{r}{2}$.



Siga N el punt de tangència en el quadrilàter.
Siga T el punt de tangència de la circumferència gran i la mitjana.
$\frac{r}{2}=\overline{UT}=\overline{UN}$.
Siga V el centre d'una de les circumferències menudes i siga s el seu radi.
Siga M el punt de tangència en el quadrilàter.
$s=\overline{VM}=\overline{VT}$.
Siga $x=\overline{QV}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{QMV}$, $\overset{\Delta}{QNU}$, $\overset{\Delta}{QOP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:



$$\frac{\overline{VM}}{\overline{QV}}=\frac{\overline{UN}}{\overline{QU}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{QP}}.$$

$$\frac{s}{x}=\frac{\frac{r}{2}}{\frac{r}{2}+s+x}=\frac{r}{\sqrt{r^2+(r+s+x)^2}}.$$

$$\frac{s}{x}=\frac{r}{r+2s+2x}=\frac{r}{\sqrt{r^2+(r+s+x)^2}}.$$

$(r+2s+2x)^2=r^2+(r+s+x)^2$.

$3s^2+3x^2+2rs+2rs+6xs=r^2$.

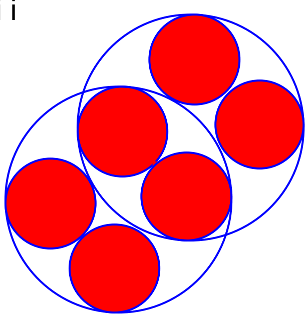
$3(s+x)^2+2r(x+s)-r^2=0$. Resolent l'equació en la incògnita $s+x$:

$s+x=\frac{1}{3}r$. Aleshores, $x=\frac{1}{3}r-s$.

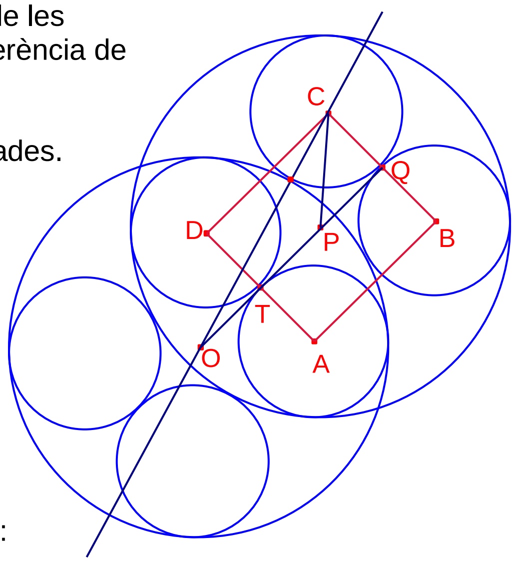
$\frac{s}{\frac{1}{3}r-s}=\frac{r}{r+2s+\frac{2}{3}r-2s}$. Resolent l'equació en la incògnita s:

$s=\frac{1}{8}r$.

573.- En la figura hi ha sis circumferències ombrejades d'igual radi i tangents dos a dos.
Dues circumferències grans d'igual radi són tangents a les sis ombrejades.
Si el radi de les grans és r calculeu el radi de les sis ombrejades.



Solució:
Siga el rectangle ABCD que formen els centres de quatre de les circumferències ombrejades tangents interiors a la circumferència de centre P.
Siguen O, P el centre de les circumferències grans.
Siga Q el punt de tangència de les circumferències ombrejades.
Siga $s=\overline{BQ}=\overline{CQ}$ radi de les circumferències ombrejades.
Siga $c=\overline{AB}$.



$\overline{PQ}=\overline{OT}=\frac{c}{2}$.

$\overline{PC}=r-s$.

$\overline{OQ}=\frac{3}{2}c$.

$\overline{OC}=r+s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQC}$:

$$(r-s)^2=s^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQC}$:

$$(r+s)^2=s^2+\left(\frac{3c}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases}(r-s)^2=s^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\\(r+s)^2=s^2+\left(\frac{3c}{2}\right)^2\end{cases}$. Resolent el sistema en les incògnites s, c:

$$\begin{cases}s=\frac{2}{5}r\\c=\frac{2\sqrt{5}}{5}r\end{cases}.$$

574.- En l'interior del triangle rectangle de costats 3, 4, 5 s'han dibuixat 2 cercles tangents iguals i tangents els dos a un dels dos catets.
A més a més, un d'ells és tangent a la hipotenusa i l'altre tangent a l'altre catet.
Determineu els radis dels cercles en els dos casos.
Crux Mathematicorum M504

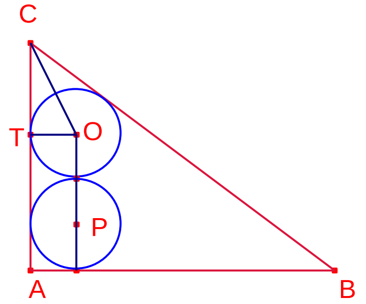
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=5$.

Cas 1

Siga la circumferència de centre O, radi r tangent a la hipotenusa $\overline{BC}$ i al catet $\overline{AC}$.
Siga la circumferència de centre P, radi r tangent a la circumferència de centre O i al catet $\overline{AB}$.
$\overline{OP}=2r$.

El centre O pertany a la bisectriu de l'angle C del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Siga $\alpha=\angle OCT$. $\overline{OT}=r$.

$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{3}{4}$.

$\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{3}{4}$. Resolent l'equació:

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

Aleshores, $\overline{CT}=2r$, $\overline{AT}=3r$

$2r+3r=3$. Resolent l'equació:

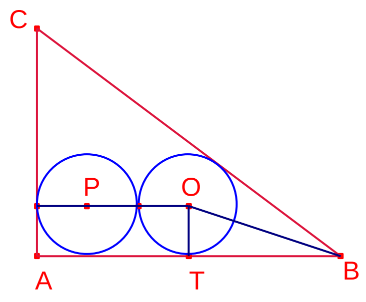
$r=\frac{3}{5}$.

Cas 2:

Siga la circumferència de centre O, radi r tangent a la hipotenusa $\overline{BC}$ i al catet $\overline{AB}$.
Siga la circumferència de centre P, radi r tangent a la circumferència de centre O i al catet $\overline{AC}$.
$\overline{OP}=2r$.

El centre O pertany a la bisectriu del angle B del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\beta=\angle OBT$. $\overline{OT}=r$.



$\mathrm{tg}2\beta=\frac{4}{3}$.

$\frac{2\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}^2\beta}=\frac{4}{3}$. Resolent l'equació:

$\mathrm{tg}\beta=\frac{1}{3}$.

Aleshores, $\overline{BT}=3r$, $\overline{AT}=3r$.

$3r+3r=4$. Resolent l'equació:

$r=\frac{2}{3}$.

575.- Els punts A, B, C, D divideixen una circumferència en parts que estan en raó 1:3:5:6.
Determineu els angles que formen les rectes tangents a la circumferència en els punts A, B, C, D.
Gúsiev 115.

Solució:
Siga O el centre de la circumferència.

Siguen $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=1:3:5:6$.

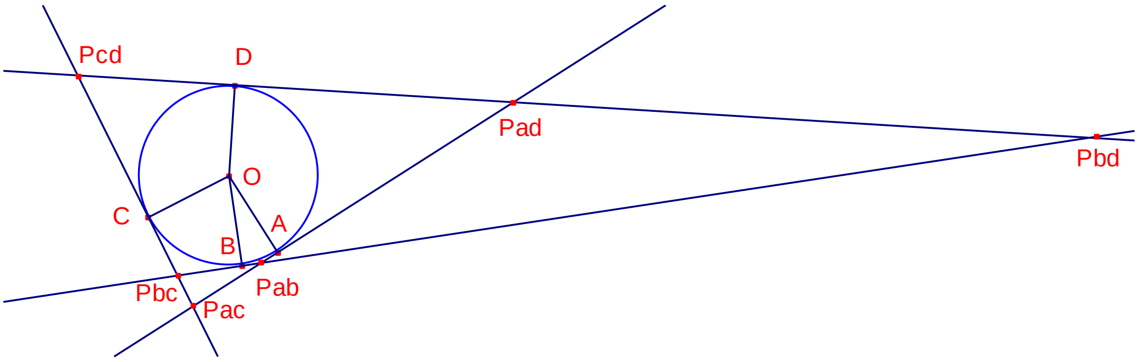
$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{360^{o}}=\frac{1}{1+3+5+6}.$$

Resolent l'equació:

$\overset{\frown}{AB}=24^{o}$.
$\angle AOB=24^{o}$.

Aleshores, $\overset{\frown}{AB}=24^{o},\overset{\frown}{BC}=72^{o},\overset{\frown}{CD}=120^{o},\overset{\frown}{DA}=144^{o}$.
Siga P_{AB} el punt d'intersecció de les rectes tangents a la circumferència en els punts A, B.
L'angle $\angle AP_{AB}B$ és exterior a la circumferència.
La seua mesura és la semidiferència dels arcs que abraça.

$$\angle AP_{AB}B=\frac{336^{o}-24^{o}}{2}=156^{o}.$$



Anàlogament:

$$\angle AP_{AC}C=\frac{264^{o}-96^{o}}{2}=84^{o}.$$

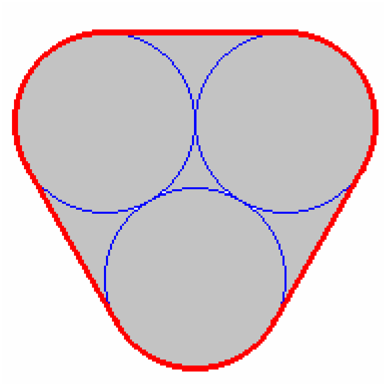
$$\angle AP_{AD}D=\frac{216^{o}-144^{o}}{2}=36^{o}.$$

$$\angle BP_{BC}C=\frac{288^{o}-72^{o}}{2}=108^{o}.$$

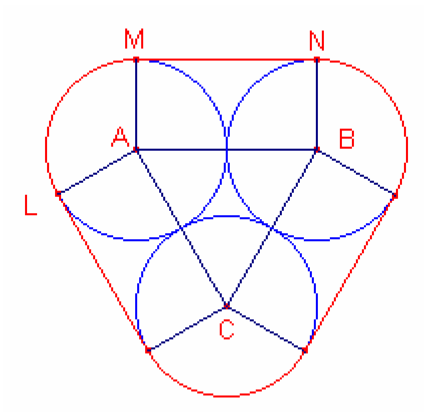
$$\angle BP_{BD}D=\frac{192^{o}-168^{o}}{2}=12^{o}.$$

$$\angle CP_{CD}D=\frac{240^{o}-120^{o}}{2}=60^{o}.$$

576.- Donades tres circumferències d'igual radi r tangents, s'han dibuixat els segments tangents a elles.
Calculeu l'àrea i el perímetre de la regió que formen.



Solució:
Siguen A, B, C els centres de les tres circumferències tangents, que formen un triangle equilàter.
Siga M, N el segment de tangència de les circumferències de centres A i B.
ABNM és un rectangle.
Siga L el punt de tangència de la circumferència de centre A.
$\angle LAM = 120^{o}$.



L'àrea de la regió és igual a la suma de les àrees del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$, tres vegades l'àrea del rectangle ABNM i l'àrea del cercle de radi r.

$$S = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} + 3(2r \cdot r) + \pi r^2 = \left(\sqrt{3} + 6 + \pi\right) r^2 .$$

El perímetre de la regió és igual a la suma de la longitud de la circumferència de radi r i 3 segments de longitud $\overline{MN} = 2r$.

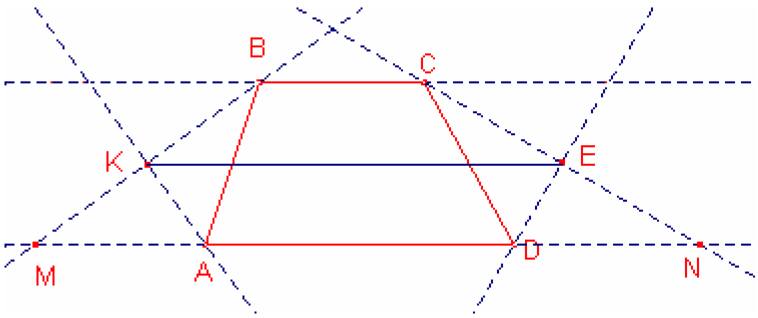
$$p = 2\pi r + 3 \cdot 2r = (6 + 2\pi) r .$$

577.- En el trapezi ABCD prolonguem cadascuna de les bases paral·leles $\overline{AD}$, $\overline{BC}$.
Les bisectrius dels angles externs A i B es tallen en el punt K, les bisectrius dels angles externs C i D es tallen en el punt E.
Si $\overline{KE} = d$ calculeu el perímetre del trapezi ABCD.
Gúsiev, 91

Solució:
La bisectriu de l'angle exterior B talla la recta AD en el punt M.
La bisectriu de l'angle exterior C talla la recta AD en el punt N.
Siga $\alpha = \angle BAD$, $\beta = \angle ADC$, aleshores:
$\angle ABC = 180^{o} - \alpha$, $\angle BCD = 180^{o} - \beta$.

$\angle MBA = \frac{\alpha}{2}$, $\angle MAB = 180^{o} - \alpha$.

Aleshores, $\angle BMA = \frac{\alpha}{2}$, per tant, el triangle $\overset{\Delta}{MAB}$ és isòsceles, aleshores:
$\overline{AM} = \overline{AB}$, M és el punt mig de $\overline{MB}$.
Anàlogament, $\overline{DN} = \overline{CD}$, N és el punt mig de $\overline{NC}$.



Aleshores, $\overline{KE}$, és la paral·lela mitjana del trapezi MNCB, aleshores:

$$\frac{\overline{MN} + \overline{BC}}{2} = \overline{KE} = d.$$

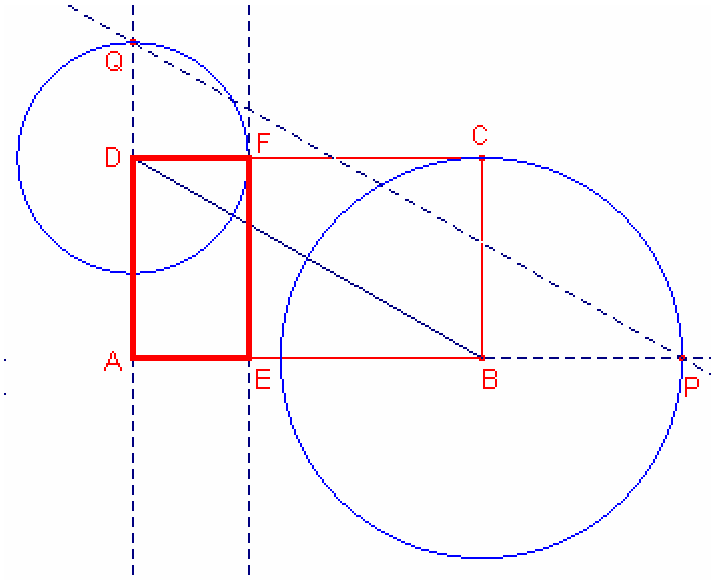
El perímetre del trapezi ABCD és:

$$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{BC} = \overline{AM} + \overline{AD} + \overline{DN} + \overline{BC} = \overline{MN} + \overline{BC} = 2d.$$

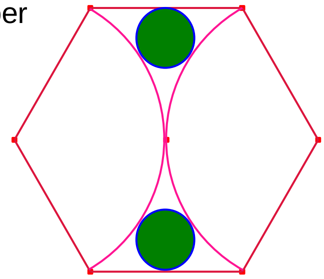
578.- Donat el rectangle ABCD $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $a \geq b$, construïu el rectangle AEFD tal que E, F pertanyen als costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament, i que els dos rectangles ABCD, AEFD siguen semblants.

Solució:
Siguen $\overline{AE} = \overline{DF} = x$, $\overline{EF} = \overline{AD} = b$.
Si els rectangles ABCD, AEFD són semblants, aplicant el teorema de Tales:
$\frac{b}{a} = \frac{x}{b}$.
Aleshores, x, és una quarta proporcional de a, b, b.

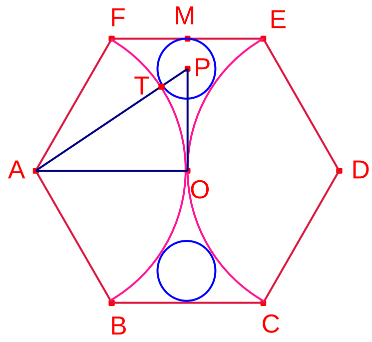
Construcció:
a) Construïm el punt P en la continuació del costat AB tal que $\overline{BP} = \overline{AD} = b$.
b) Dibuixem el segment $\overline{BD}$.
c) Dibuixem la recta r paral·lela al segment $\overline{BD}$ que passa per P.
d) La recta r talla la recta AD en el punt Q.
Notem que $\frac{\overline{DQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, és a dir, $\frac{x}{b} = \frac{b}{a}$.
e) Dibuixem el punt F en $\overline{CD}$ tal que $\overline{DF} = \overline{DQ}$.
f) Dibuixem la recta s paral·lela a la recta AD que passa per F.
g) La recta s talla la recta AB en el punt E.
h) Dibuixeu el rectangle AEFD.



579.- En un hexàgon regular s'han dibuixat dos arcs que passen per dos vèrtexs i pel centre de l'hexàgon i dues circumferències tangents als arcs i a un costat.
Si el costat de l'hexàgon és c determineu el radi de les dues circumferències.



Solució:
Siga l'hexàgon regular ABCDEF de centre O.
Siga $\overline{AB} = \overline{AO} = c$ costat de l'hexàgon.
Siga M el punt mig del costat $\overline{EF}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OME}$:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

Siga P el centre d'una de les dues circumferències i $r = \overline{PT} = \overline{PM}$ el radi.

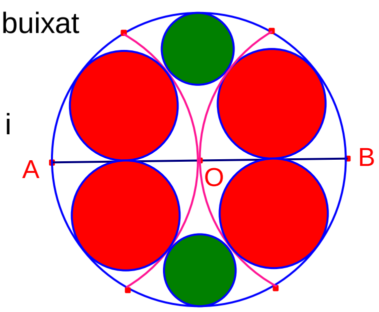
$$\overline{AP} = c + r\ ,\ \overline{OP} = \overline{OM} - \overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c - r\ .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$:

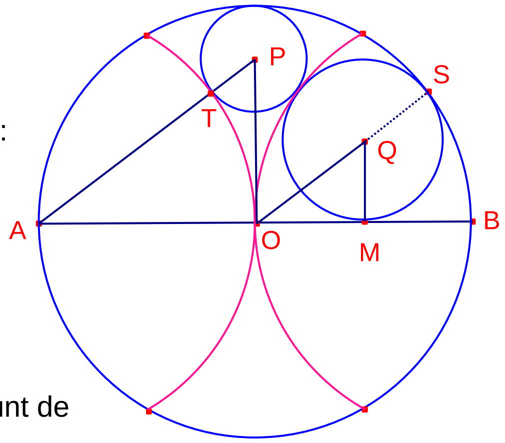
$(c+r)^2 = c^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c - r\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r = \frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}c\ .$$

580.- En una circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$ s'han dibuixat dos arcs de centres A, B que passen pel punt O.
S'han dibuixat dos cercles tangents als dos arcs i a la circumferència i 4 cercles tangents a un arc, a la circumferència i al diàmetre $\overline{AB}$.
Determineu la proporció entre els radis dels dos tipus de cercles.



Solució:
Siga el diàmetre $\overline{AB} = 2R$.
Siga P en centre d'un dels cercles tangents als dos arcs i a la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$.
Siga $\overline{PT} = r$ el radi del cercle.
$\overline{AP} = R + r$, $\overline{OP} = R - r$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$:
$(R+r)^2 = r^2 + (R-r)^2$.
Resolent l'equació:
$r = \frac{R}{4}$.
Siga Q el centre d'un dels cercles tangents a un arc arcs, a la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$ i al diàmetre.
Siga M el punt mig del segment $\overline{OB}$. Notem que M és el punt de tangència del cercle i el diàmetre.
Siga $\overline{QS} = \overline{QM} = s$ el radi.
$\overline{OM} = \frac{R}{2}$, $\overline{OQ} = R - s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMQ}$:

$$(R-s)^2 = s^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Resolent l'equació:
$s = \frac{3R}{8}$.
La proporció entre els radis dels dos tipus de cercles és:

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{1}{4}R}{\frac{3}{8}R} = \frac{2}{3}.$$