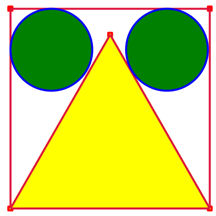
Problemes de Geometria per a l'ESO 59

581.- En la figura, dins d'un quadrat de costat c s'han dibuixat un triangle equilàter i dues circumferències tangents a dos costats del quadrat i a un costat del triangle equilàter.
Calculeu el radi de les circumferències.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

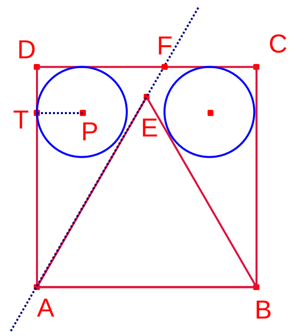
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$.

La recta AE talla el costat $\overline{CD}$ en el punt F.

Siga la circumferència de centre P i radi $r = \overline{PT}$, tangent a $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{CD}$.

Aquesta circumferència està inscrita en el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADF}$.

$\angle DAF = 30^{o}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADF}$:

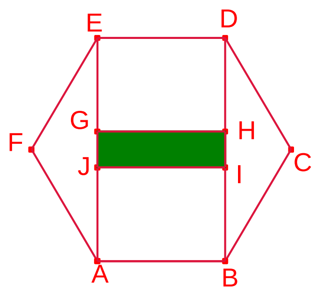
$\overline{AF} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c$, $\overline{DF} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADF}$ és:

$$r = \frac{\overline{AD} + \overline{DF} - \overline{AF}}{2}.$$

$$r = \frac{c + \frac{\sqrt{3}}{3}c - \frac{2\sqrt{3}}{3}c}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}c.$$

582.- Dins de l'hexàgon regular ABCDEF de costat c s'han dibuixat els quadrats ABHG i DEJI.
Determineu l'àrea del rectangle GHIJ.

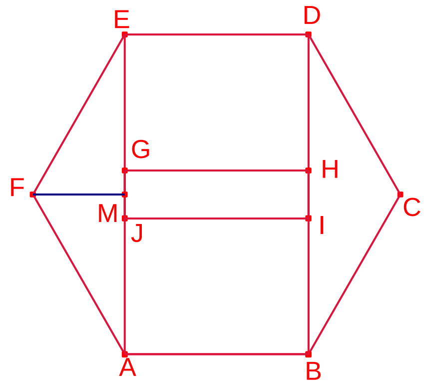


Solució:

Siga $\overline{AB} = \overline{EF} = c$ costats de l'hexàgon regular.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AE}$.

$\angle FEA = 30º$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FME}$:

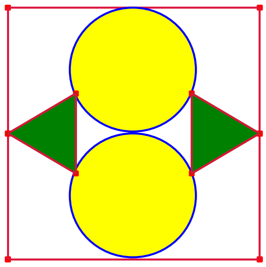
$\overline{EM} = \frac{\sqrt{3}}{2} c$, aleshores:

$$\overline{GJ} = 2\left(\overline{EJ} - \overline{EM}\right) = 2\left(c - \frac{\sqrt{3}}{2} c\right) = \left(2 - \sqrt{3}\right) c .$$

L'àrea del rectangle GHIJ és:

$$S_{GHIJ} = \overline{GJ} \cdot \overline{IJ} = \left(2 - \sqrt{3}\right) c^2 .$$

583.- En la figura, dins d'un quadrat de costat c s'han dibuixat dues circumferències d'igual radi tangents i tangents al quadrat en els punts migs dels costats. S'han dibuixat dos triangles equilàters que tenen un vèrtex en el punt mig del costat i els altres dos en les dues circumferències.
Determineu la mesura dels costats dels triangles equilàters.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{MPQ}$, de costat $\overline{PQ} = d$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{PQ}$.

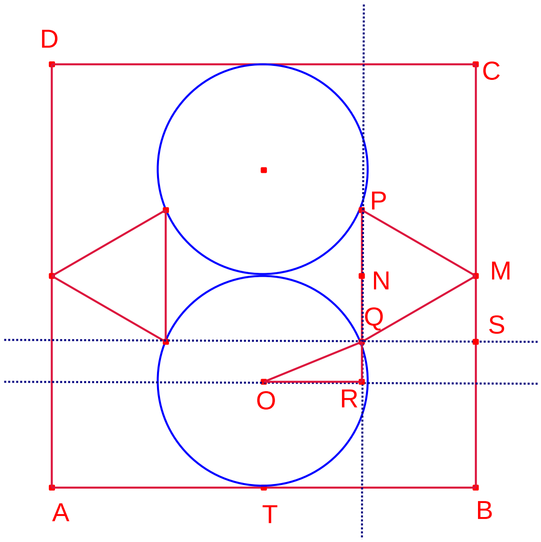
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QNM}$:

$\overline{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$, $\overline{QN} = \frac{1}{2}d$.

Siga T el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \frac{c}{4}$.

Siga R la intersecció de la recta PQ i la recta perpendicular al costat $\overline{AD}$ que passa pel punt O.



$\overline{OR} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{MN} = \frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{2}d$.

$\overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \overline{NQ} - \overline{OT} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d - \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}c - \frac{1}{2}d$.

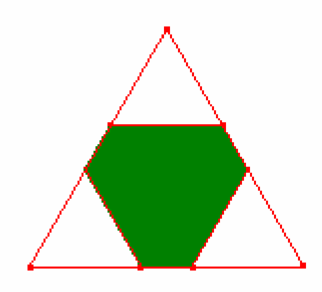
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ORQ}$:

$$\left(\frac{1}{4}c\right)^2 = \left(\frac{1}{4}c - \frac{1}{2}d\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{2}d\right)^2.$$

Resolent l'equació en la incògnita d:

$$d = \frac{1 + 2\sqrt{3} - \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{8}c.$$

584.- Un triangle equilàter de costat c li retallem 3 triangles equilàters iguals.
Quant mesuren els costats d'aquests 3 triangles a fi que el que resta tinga la meitat d'àrea que el triangle inicial.



Solució:
La suma de les àrees dels triangles que retalle també és la meitat de l'àrea del triangle inicial.

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = c$.

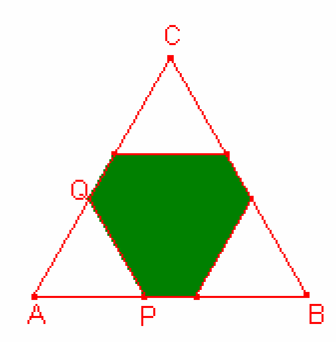
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Siga $\overset{\Delta}{APQ}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AP} = x$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és:

$$S_{APQ} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

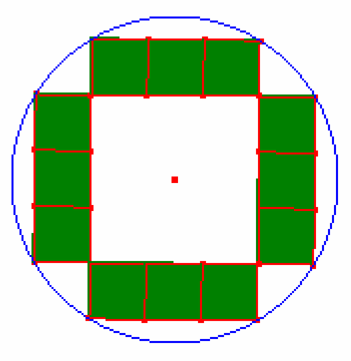


$6 \cdot S_{APQ} = S_{ABC}$, aleshores:

$6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6}c.$$

585.- En la circumferència de radi R de la figura s'han dibuixat 12 quadrats iguals ombrejats.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.

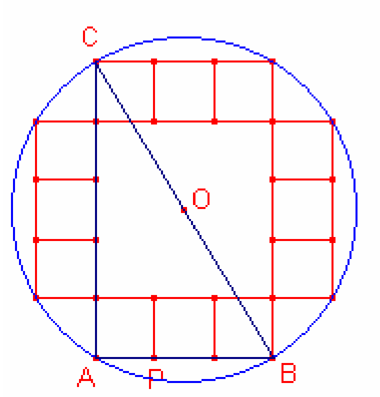


Solució:

Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{BC}=2R$.

Siga $\overline{AP}=x$ costat del quadrat.

$\overline{AB}=3x$, $\overline{AC}=5x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

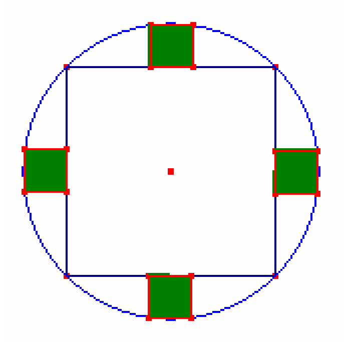
$(5x)^2+(3x)^2=(2R)^2$. Resolent l'euació en la incògnita x^2:

$x^2=\frac{4}{34}=\frac{2}{17}$.

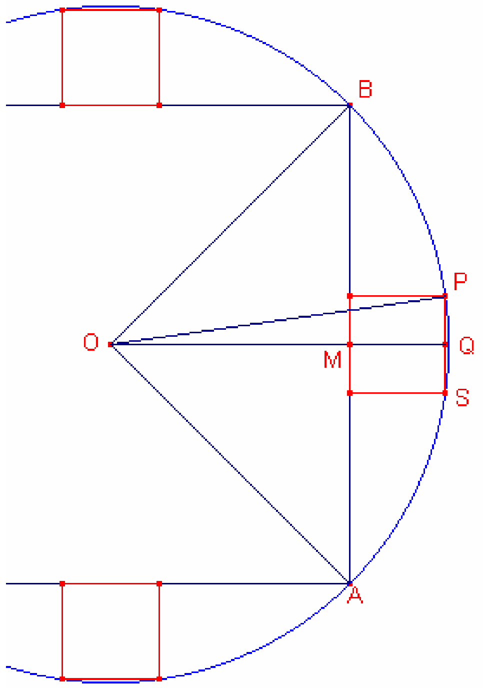
L'àrea de la zona ombrejada és la suma de les àrees de 12 quadrats de costat x.

$S=12\cdot x^2=12\cdot\frac{2}{17}=\frac{24}{17}$.

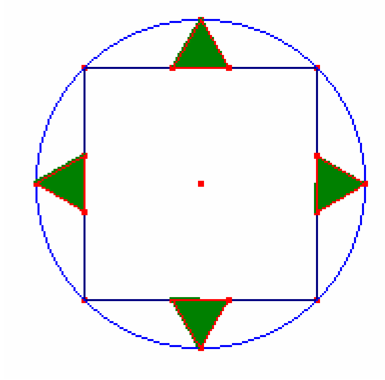
586.- En una circumferència s'ha inscrit un quadrat.
A l'exterior del quadrat s'han dibuixat 4 quadrats iguals que tenen, cadascun, dos vèrtexs en un costat del quadrat i els altres dos en la circumferència.
Determineu la proporció entre els costats d'un quadrat exterior i el quadrat inscrit en la circumferència.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $R=\overline{OA}=\overline{OB}$.
Siga el quadrat de costat $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OAB}$:
$\overline{AB}=R\sqrt{2}$
Siga el quadrat de costat $\overline{PS}=c$.
Siga Q el punt mig del costat $\overline{PS}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
$\overline{AM}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, $\overline{MQ}=c$, $\overline{PQ}=\frac{1}{2}c$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OQP}$:
$R^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R+c\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita c:
$c=\overline{PS}=\frac{\sqrt{2}}{5}R$.
La proporció entre els costats dels quadrats és:
$\frac{\overline{PS}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{5}R}{R\sqrt{2}}=\frac{1}{5}$.



587.- En una circumferència de radi R s'ha inscrit un quadrat.
A l'exterior del quadrat s'han dibuixat 4 triangles equilàters iguals que tenen, cadascun, dos vèrtexs en un costat del quadrat i l'altre en la circumferència.
Determineu la mesura dels costats dels triangles equilàters.



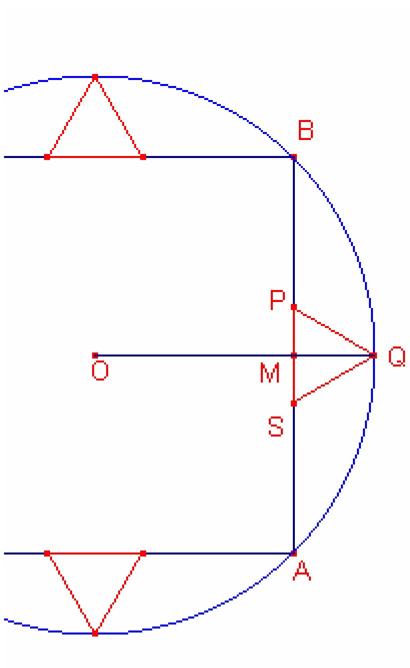
Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $R=\overline{OA}=\overline{OB}$.

Siga el quadrat de costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$\overline{AB}=R\sqrt{2}$.



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQS}$ de costat $\overline{PS}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$$\overline{AM}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMQ}$:

$$\overline{MQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

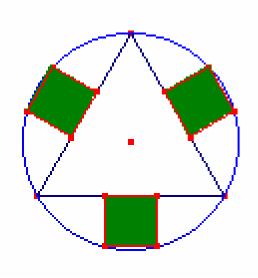
$$\overline{OQ}=\overline{OM}+\overline{MQ}$$

$$R=\frac{\sqrt{2}}{2}R+\frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

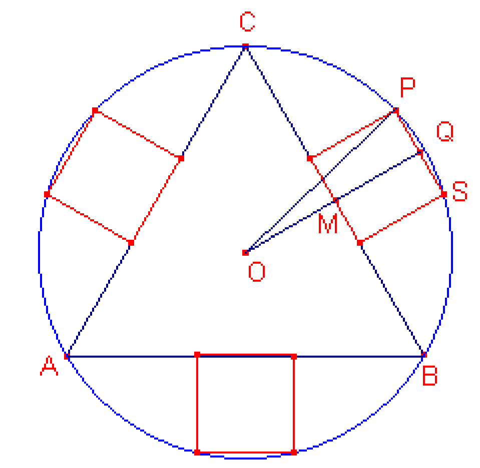
Resolent l'equació en la incògnita c:

$$c=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}R.$$

588.- En una circumferència de radi R s'ha inscrit un triangle equilàter.
A l'exterior del triangle s'han dibuixat 3 triangles quadrats iguals que tenen, cadascun, dos vèrtexs en un costat del triangle i els altres en la circumferència.
Determineu la mesura dels costats dels quadrats.



Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $R=\overline{OA}=\overline{OB}$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

$\overline{OM}=\frac{\overline{OB}}{2}=\frac{R}{2}$, $\overline{AM}=\frac{3R}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$

$\overline{MB}=R\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{BC}=R\sqrt{3}$

Siga el quadrat de costat $\overline{PS}=c$.

Siga Q el punt mig del costat $\overline{PS}$.

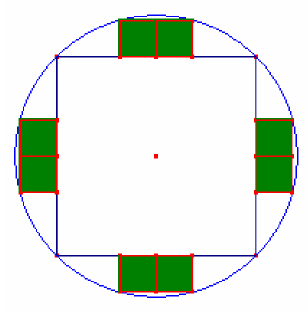
$\overline{MQ}=c$, $\overline{PQ}=\frac{1}{2}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OQP}$:

$R^2=\left(\frac{1}{2}R+c\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita c:

$c=\overline{PS}=\frac{-2+\sqrt{19}}{5}R$.

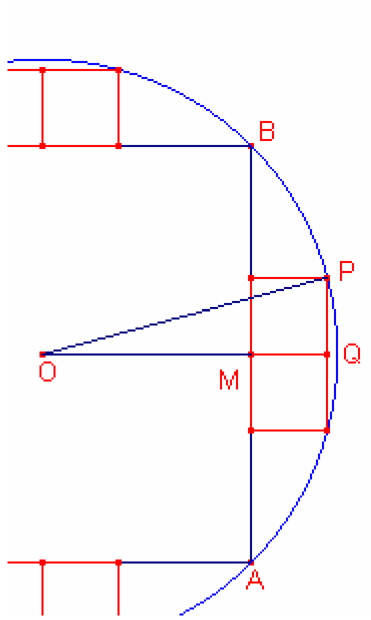
589.- En una circumferència de radi R s'ha inscrit un quadrat.
A l'exterior del quadrat s'han dibuixat 8 quadrats iguals (veure figura).
Determineu la mesura dels 8 quadrats.



Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $R=\overline{OA}=\overline{OB}$.

Siga el quadrat de costat $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$\overline{AB}=R\sqrt{2}$

Siga el quadrat de costat $\overline{PQ}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

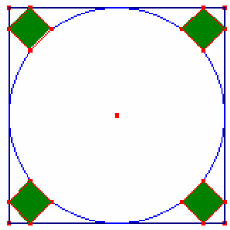
$\overline{OM}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, $\overline{MQ}=c$,.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OQP}$:

$R^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R+c\right)^2+c^2$. Resolent l'equació en la incògnita c:

$c=\overline{PQ}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}R$.

590.- En una quadrat de costat c s'ha inscrit una circumferència.
A l'exterior de la circumferència s'han dibuixat 4 quadrats iguals que tenen, cadascun, un costat tangent a la circumferència i el costat oposat en dos costats del quadrat inicial.
Determineu la mesura del costat dels 4 quadrats.



Solució:
Siga O el centre del quadrat.
Siga M un dels punts de tangència de la circumferència inscrita al quadrat.
Siga N el punt de tangència de la circumferència i el quadrat menut.

$\overline{AM}=\overline{ON}=\frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

$\overline{OA}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Siga $\overline{PS}=x$ costat del quadrat menut.
Siga Q el punt mig del costat $\overline{PS}$.

$\overline{PQ}=\overline{AQ}=\frac{x}{2}$.

$\overline{OA}=\overline{ON}+\overline{NQ}+\overline{AQ}$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}c=\frac{c}{2}+x+\frac{x}{2}$.

Resolent l'equació en la incògnita x:

$x=\frac{\sqrt{2}-1}{3}c$.