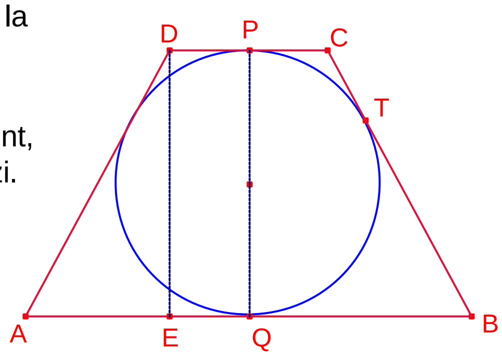
Problemes de Geometria per a l'ESO 6

51.- Al voltant d'una circumferència està circumscrit un trapezi isòsceles tal que els costats iguals mesuren l. Una de les seues bases és a, Determineu l'àrea del trapezi. Shariguin I37.

Solució:



Siga ABCD el trapezi isòsceles $\overline{AB} // \overline{CD}$ circumscrit a la circumferència.

Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = \overline{BC} = l$.

Els punts mig P, Q dels costats $\overline{CD}, \overline{AB}$, respectivament, són punts de tangència de la circumferència i el trapezi.

Siga T el punt de tangència del costat $\overline{BC}$ i la circumferència.

Aleshores, $\overline{QB} = \overline{BT} = \frac{a}{2}$. $\overline{CT} = \overline{CP} = l - \frac{a}{2}$.

Per tant, $\overline{CD} = 2\left(l - \frac{a}{2}\right) = 2l - a$.

Siga E el punt projecció del punt D sobre el costat $\overline{AB}$.

$\overline{AE} = \overline{AQ} - \overline{DP} = \frac{a}{2} - \left(l - \frac{a}{2}\right) = a - l$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$:

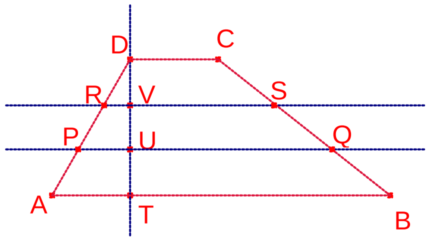
$\overline{DE} = \sqrt{l^2 - (a-l)^2} = \sqrt{a(2l-a)}$.

Aleshores la superfície del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{DE} = \frac{a + 2l - a}{2}\sqrt{a(2l-a)} = l\sqrt{a(2l-a)}.$$

52.- Dues rectes paral·leles a les base d'un trapezi divideixen cadascun del costats no paral·lels en tres parts iguals, a la vegada el trapezi queda dividit per les rectes en tres parts. Si la part gran mesura S_1 i la part menuda mesura S_2. Calculeu l'àrea de la part mitjana.
Shariguin I38.

Solució:
Siga el trapezi ABCD, $\overline{AB} // \overline{CD}$ i les rectes PQ, RS tal que $\overline{AP} = \overline{PR} = \overline{RD}$ i $\overline{BQ} = \overline{QS} = \overline{SC}$.
Siga S l'àrea del trapezi mitjà PQSR.
Siga la recta perpendicular a la base $\overline{AB}$ que passa pel punt D.
Aquesta recta talla el costat $\overline{AB}$ i les rectes PQ, RS en els punts T, U, V respectivament, tal que $\overline{TU} = \overline{UV} = \overline{VD} = m$.



Siga $x = \overline{PQ}$, $y = \overline{RS}$, $z = \overline{CD}$.
L'àrea del trapezi ABQP és:

$$S_1 = \frac{a+x}{2} m \qquad (1)$$

L'àrea del trapezi RSCD és:

$$S_2 = \frac{y+z}{2} m \qquad (2)$$

L'àrea del trapezi PQSR és:

$$S = \frac{x+y}{2} m \qquad (3)$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{a+z}{2} 3m = S_1 + S_2 + S \qquad (4)$$

Substituint les expressions (1) (2) (3) en l'expressió (4):

$\frac{a+z}{2} 3m = \frac{a+x}{2} m + \frac{y+z}{2} m + \frac{x+y}{2} m$. Simplificant:

$$x + y - z = a \qquad (5)$$

$$x + y = a + z \qquad (6)$$

Dividint les expressions (4) i (3)

$$\frac{(a+z)3}{x+y} = \frac{S_1 + S_2 + S}{S} \qquad (7)$$

Substituint l'expressió (6) en l'expressió (7):

$$\frac{(a+z)3}{a+z} = \frac{S_1 + S_2 + S}{S}.$$

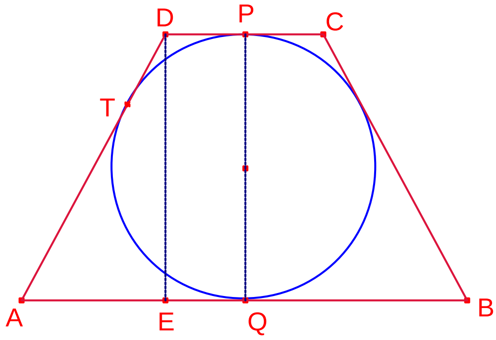
$$\frac{S_1 + S_2 + S}{S} = 3.$$

Resolent l'equació en la incògnita S:

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2}.$$

53.- En un trapezi isòsceles circumscrit a una circumferència la raó entre els costats paral·lels es k. Determineu l'angle de la base.
Shariguin I41.

Solució:
Siga $\alpha = \angle DAB = \angle ABC$.



Siga ABCD el trapezi isòsceles $\overline{AB} // \overline{CD}$ circumscrit a la circumferència.
Siga $a = \overline{AB}$, $\overline{CD} = ka$.
Els punts mig P, Q dels costats $\overline{CD}, \overline{AB}$, respectivament, són punts de tangència de la circumferència i el trapezi.
Siga T el punt de tangència del costat $\overline{AD}$ i la circumferència.
Aleshores, $\overline{AQ} = \overline{AT} = \frac{a}{2}$. $\overline{DT} = \overline{DP} = \frac{ka}{2}$.
Siga E el punt projecció del punt D sobre el costat $\overline{AB}$.

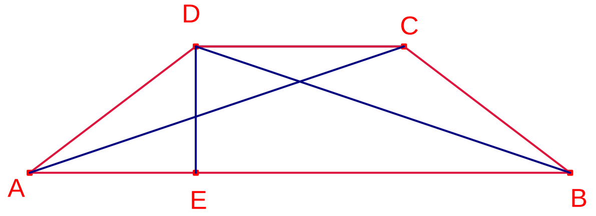
$$\overline{AE} = \overline{AQ} - \overline{DP} = \frac{a}{2} - \left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{(1-k)a}{2}.$$

$$\overline{AD} = \overline{AT} + \overline{DT} = \frac{a}{2} + \frac{ka}{2} = \frac{(1+k)a}{2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{1-k}{1+k}.$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1-k}{1+k}\right).$$

54.- En un trapezi ABCD els costats paral·leles mesuren $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$. Determineu l'àrea del trapezi si les seues diagonals són les bisectrius dels angles $\angle DAB$ i $\angle ABC$. Shariguin I42.



Solució:
Vegem que el trapezi és isòsceles.
Siga $\alpha = \angle CAB = \angle DAC$.
Aleshores, $\angle ACD = \alpha$. Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és isòsceles.
Per tant, $\overline{AD} = \overline{CD} = b$.
Siga $\beta = \angle ABD = \angle DBC$.

Aleshores, $\angle BDC = \beta$. Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles.
Per tant, $\overline{BC} = \overline{CD} = b$.
Per tant el trapezi ABCD és isòsceles.

Siga E el punt projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.
$$\overline{AE} = \frac{a-b}{2}.$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$:
$$\overline{DE} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3b^2 - a^2 + 2ab}}{2}.$$
L'àrea del trapezi ABCD és:
$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}\overline{DE} = \frac{(a+b)\sqrt{3b^2 - a^2 + 2ab}}{4}.$$

55.- La paral·lela mitjana d'un trapezi isòsceles mesura a i les diagonals són perpendiculars. Determineu l'àrea del trapezi.
Shariguin I43.

Solució:

Siga ABCD un trapezi de costats paral·lels $\overline{AB} = x$, $\overline{CD} = y$.

Siga $\overline{PQ} = a$ la paral·lela mitjana.
Siga h l'altura del trapezi ABCD.
L'àrea del trapezi ABQP és:

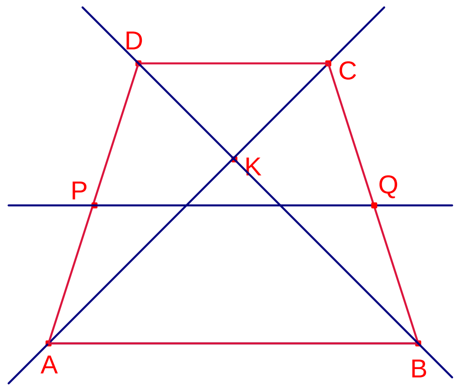
$$S_{ABQP} = \frac{x+a}{2}\frac{h}{2}.$$

L'àrea del trapezi PQCD és:

$$S_{PQCD} = \frac{a+y}{2}\frac{h}{2}.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{x+y}{2}h = \frac{x+a}{2}\frac{h}{2} + \frac{a+y}{2}\frac{h}{2}.$$



Simplificant:

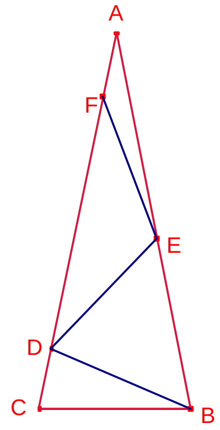
$$x+y = \frac{x+y+2a}{2}.$$

Aleshores, $x+y = 2a$.

Siguen $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ perpendiculars. $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ són iguals per ser el trapezi isòsceles.
Siga K la seua intersecció.
Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{ABK}$ són rectangles i isòsceles.
Per tant, $\overline{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $\overline{DK} = \frac{\sqrt{2}}{2}y$.
La superfície del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CDK} + 2\cdot S_{AKD} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}x\frac{\sqrt{2}}{2}y =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}(2a)^2 = a^2.$$



56.- En la figura el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles i $A = 20^o$. A més a més, $\overline{CB} = \overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EF}$. Determineu la mesura de l'angle $\angle FBA$.
Concurs Puig Adam.

Solució:

En el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 20^o$, $B = C = 80^o$.

$\overline{CB} = \overline{BD}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CBD}$ és isòsceles, per tant,
$\angle BDC = \angle DCB = 80^o$, $\angle CBD = 20^o$.
$\angle DBE = 80^o - \angle CBD = 80^o - 20^o = 60^o$.

$\overline{BD} = \overline{DE}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DBE}$ és isòsceles, per tant,
$\angle DBE = \angle DEB = 60^o$, $\angle EDB = 60^o$.
Aleshores, el triangle és equilàter, $\overline{BE} = \overline{BD} = \overline{CB}$.
$\angle EDF = 180^o - (\angle BDC + \angle EDB) = 180^o - (80^o + 60^o) = 40^o$.

$\overline{DE} = \overline{EF}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és isòsceles, per tant,
$\angle EDF = \angle DFE = 40^o$, $\angle DEF = 100^o$.
$\angle FEB = \angle DEB + \angle DEF = 60^o + 100^o = 160^o$.

$\overline{BE} = \overline{EF}$, aleshores el triangle $\overset{\Delta}{BEF}$ és isòsceles, per tant,
$$\angle BFE = \angle FBE = \frac{180^o - 160^o}{2} = 10^o.$$

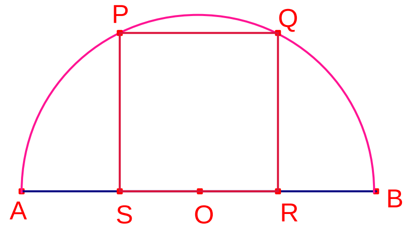
Aleshores, $\angle FBA = \angle FBA = 10^o$.

57.- En un semicercle de radi 2 i diàmetre $\overline{AB}$, es dibuixa un quadrat PQRS amb P i Q sobre el semicercle, i R i S sobre $\overline{AB}$. L'àrea del quadrat és més petita o més gran que la meitat de l'àrea del semicercle?
Crux Mathematicorum M364.

Solució:

L'àrea del semicercle és $S=\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=2\pi$.

L'àrea de la meitat del semicercle és π.



Siga $x=\overline{PQ}$ costat del quadrat.

Siga O el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$\overline{OS}=\overline{OR}=\frac{x}{2}$.

$\overline{OP}=\overline{OA}=2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OSP}$:

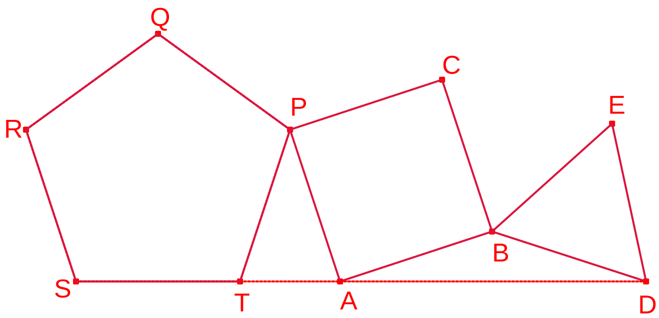
$x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=2^2$. Simplificant:

$x^2=\frac{16}{5}$.

L'àrea del quadrat és $S_{PQRS}=x^2=\frac{16}{5}$.

$\frac{16}{5}>\pi$, aleshores l'àrea del quadrat és major que la meitat de l'àrea del semicercle.

58.- En la figura el pentàgon regular, el quadrat i el triangle equilàter tenen la mateixa mesura del costat.
Calculeu l'angle $\angle QCE$.
Eureka 28 pàgina 17.



Solució:

$\angle STP = TPQ = 108^o$.

$\angle PTA = 180^o - \angle STP = 180^o - 108^o = 72^o$.

$\angle TPA = 180^o - 2\angle PTA = 180^o - 2 \cdot 72^o = 36^o$.

$\angle QPC = 360^o - (\angle TPQ + \angle TPA + \angle APC) = 360^o - (108^o + 36^o + 90^o) = 126^o$.

$\angle QCP = \frac{180^o - \angle QPC}{2} = \frac{180^o - 126^o}{2} = 27^o$.

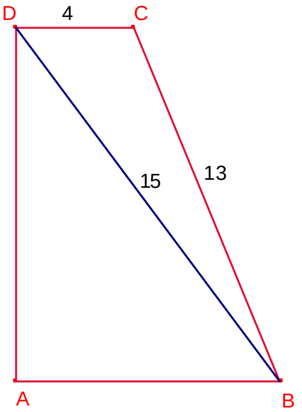
$\angle BAD = 180^o - (\angle TAP + \angle PAB) = 180^o - (72^o + 90^o) = 18^o$.

$\angle ABD = 180^o - 2\angle BAD = 180^o - 36^o = 144^o$.

$\angle CBE = 360^o - (\angle ABC + \angle ABD + \angle DBE) = 360^o - (90^o + 144^o + 60^o) = 66^o$.

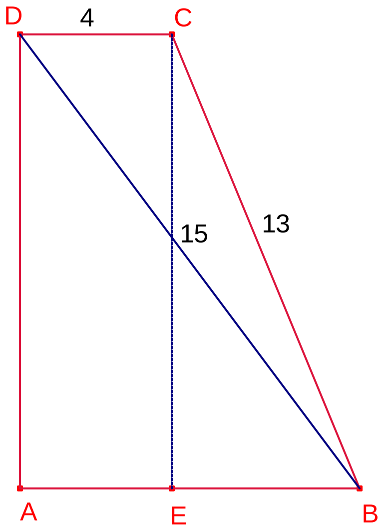
$\angle BCE = \frac{180^o - \angle CBE}{2} = \frac{180^o - 66^o}{2} = 57^o$.

$\angle QCE = \angle QCP + \angle PCB + \angle BCE = 27^o + 90^o + 57^o = 174^o$.



59.- Siga el trapezi rectangle ABCD tal que $\overline{CD}=4$, $\overline{BD}=15$, $\overline{BC}=13$. Calculeu la seua àrea.
García Ardura 718.

Solució:



Siga $a=\overline{AB}$, $h=\overline{AD}$.
Siga E la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.
$\overline{BE}=a-4$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$h^2+a^2=15^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBC}$:

$$h^2+(a-4)^2=13^2 \qquad (2)$$

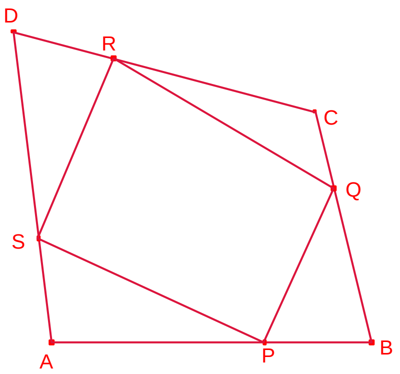
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} h^2+a^2=15^2 \\ h^2+(a-4)^2=13^2 \end{cases}$. La solució del qual és $\begin{cases} a=9 \\ h=12 \end{cases}$.

Aleshores l'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD}=\frac{a+4}{2}h=\frac{9+4}{2}12=78.$$

60.- En la següent figura els segments $\overline{PB}, \overline{CQ}, \overline{DR}, \overline{AS}$ mesuren la meitat que els segments $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CR}, \overline{DS}$, respectivament. Calculeu la proporció entre les àrees dels quadrilàters ABCD i PQRS.
García Ardura.



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\overset{\Delta}{PBQ}$, $\overset{\Delta}{ABQ}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{ABQ}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABQ}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{ABQ}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \qquad (2)$$

Multiplicant les expressions (1) (2):

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{ABC}} = \frac{2}{9}.$$

Aleshores, $S_{PBQ} = \frac{2}{9} S_{ABC}$.

Anàlogament, $S_{RDS} = \frac{2}{9} S_{ADC}$, $S_{PAS} = \frac{2}{9} S_{BAD}$, $S_{QCR} = \frac{2}{9} S_{BCD}$.

Sumant les quatre darreres expressions:

$$S_{PBQ} + S_{RDS} + S_{PAS} + S_{QCR} = \frac{2}{9} S_{ABC} + \frac{2}{9} S_{ADC} + \frac{2}{9} S_{BAD} + \frac{2}{9} S_{BCD} = \frac{2}{9} S_{ABCD} + \frac{2}{9} S_{ABCD} = \frac{4}{9} S_{ABCD}$$

$$S_{PQRS} = S_{ABCD} - (S_{PBQ} + S_{RDS} + S_{PAS} + S_{QCR}) = S_{ABCD} - \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{5}{9} S_{ABCD}.$$

Aleshores, $\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{9}$.