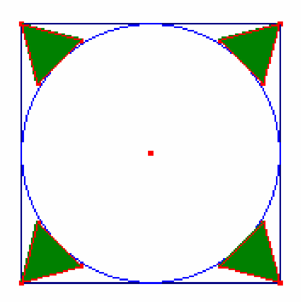
Problemes de Geometria per a l'ESO 60

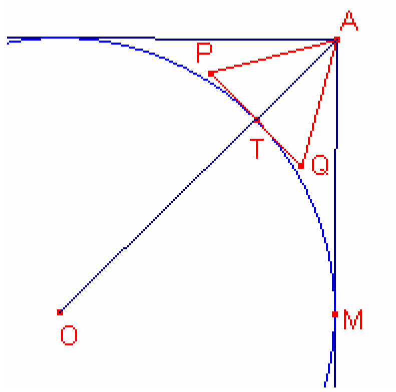
591.- En una quadrat de costat c s'ha inscrit una circumferència.
A l'exterior de la circumferència s'han dibuixat 4 triangles equilàters iguals que tenen, cadascun, un costat tangent a la circumferència i el vèrtex oposat és un vèrtex del quadrat.
Determineu la mesura del costat dels 4 triangles.



Solució:
Siga O el centre del quadrat.
Siga M un dels punts de tangència de la circumferència inscrita al quadrat.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i el triangle equilàter.

$\overline{AM} = \overline{OT} = \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:



$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Siga $\overline{PQ} = x$ costat del triangle equilàter.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTA}$

$\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

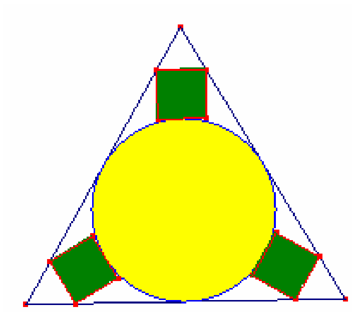
$\overline{OM} = \overline{OT} + \overline{AT}$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Resolent l'equació en la incògnita x:

$x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}c$.

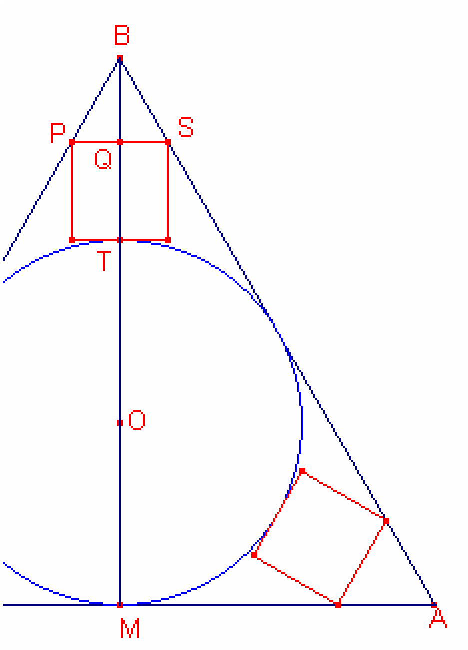
592.- En un triangle equilàter de costat c s'ha inscrit una circumferència.
A l'exterior de la circumferència s'han dibuixat 4 quadrats iguals que tenen, cadascun, un costat tangent a la circumferència i el costat oposat en dos costats del triangle.
Determineu la mesura del costat dels 3 quadrats.



Solució:
Siguen A, B dos vèrtexs del triangle equilàter.
Siga O el centre del triangle equilàter.
Siga M un dels punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i un quadrat.

$$\overline{AM} = \frac{c}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MAB}$



$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Per la propietat del baricentre del triangle:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}c.$$

Siga $\overline{PS} = x$ costat del quadrat.

Siga Q el punt mig del costat $\overline{PS}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQB}$

$$\overline{BQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

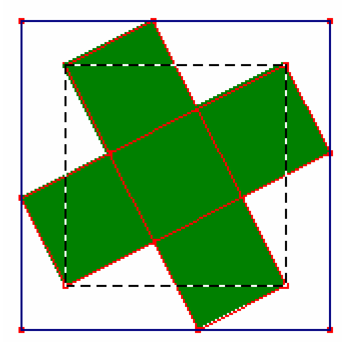
$$\overline{MB} = 2\overline{OM} + \overline{TQ} + \overline{QB}.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}c = 2\frac{\sqrt{3}}{6}c + x + \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{2\sqrt{6} - 3}{3}c.$$

593.- Una figura en forma de creu està formada per 5 quadrats de costat 1, està inscrita en un quadrat major, els costats del qual són paral·lels d'un quadrat puntejat format per quatre vèrtexs de la creu.
Calculeu l'àrea del quadrat major.

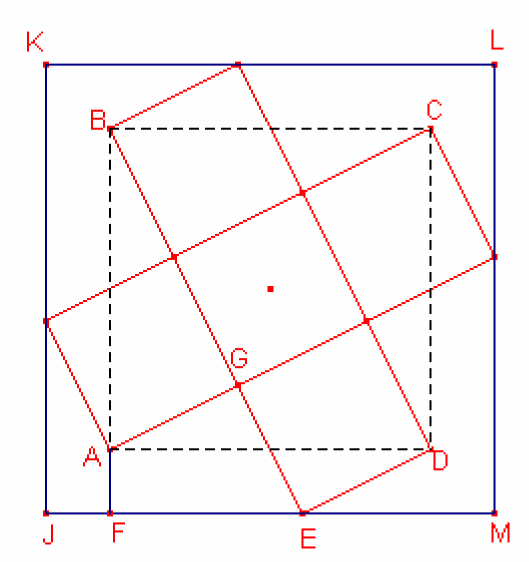


Solució:
Siga JKLM el quadrat major.
Siga ABCD el quadrat puntejat.
Siga F la projecció de A sobre $\overline{JM}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDE}$:
$\overline{BD} = \sqrt{10}$.

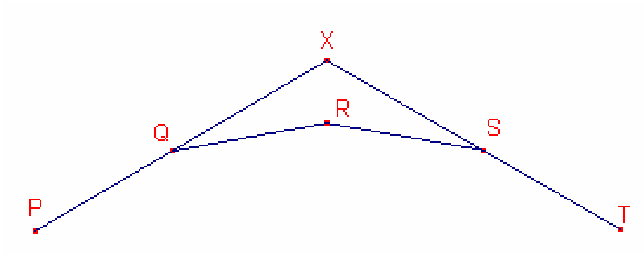
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAD}$:
$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{10} = \sqrt{5}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BAG}$, $\overset{\Delta}{BEF}$ són semblants.

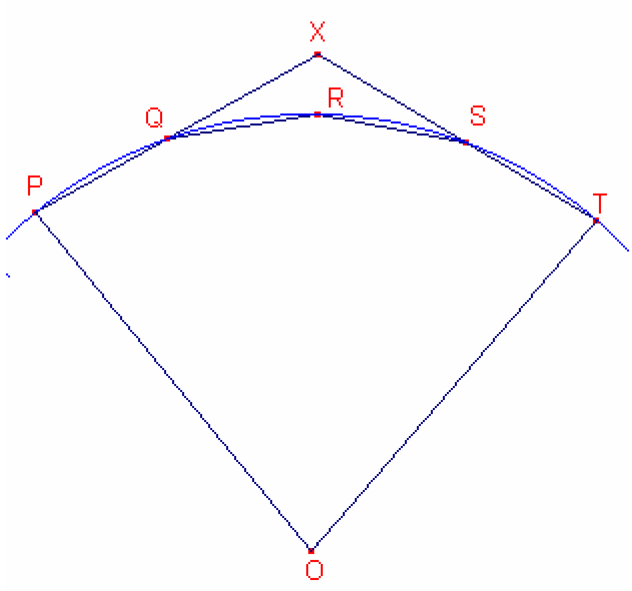


Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}.$$
$$\frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}.$$ Aleshores:
$$\overline{BF} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$
$$\overline{AF} = \overline{BF} - \overline{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
El costat del quadrat JKLM és:
$$\overline{JM} = \overline{AB} + 2\overline{AF} = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$
L'àrea del quadrat JKLM és:
$$S_{JKLM} = \overline{JM}^2 = \frac{49}{5}.$$

594.- Els punts P, Q, R, S, T són els vèrtexs d'un polígon regular.
La prolongació dels costats $\overline{PQ}$, $\overline{TS}$ s'intersecta en el punt X.
Si $\angle QXS = 140º$ determineu el nombre de costats del polígon regular.

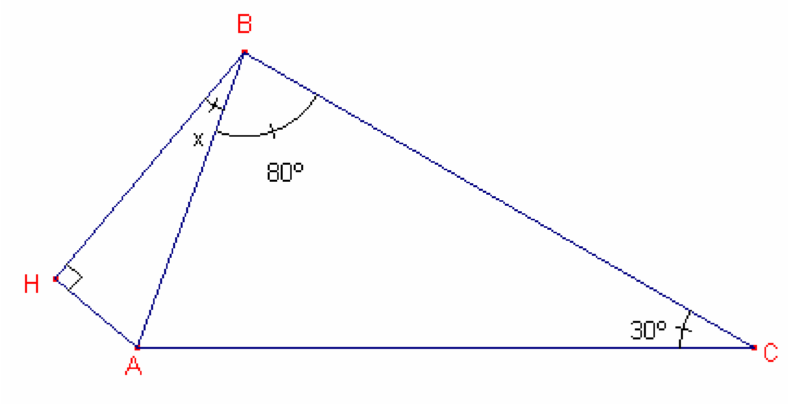


Solució:
Siga <O> el centre del polígon regular.
Siga $\angle POQ = \alpha$ angle central del polígon regular.
L'angle interior del polígon regular és:
$\angle PQR = 180º - \alpha$.
$\angle QPT$ és una angle inscrit en la circumferència, la seua mesura és la meitat que l'arc que abraça.

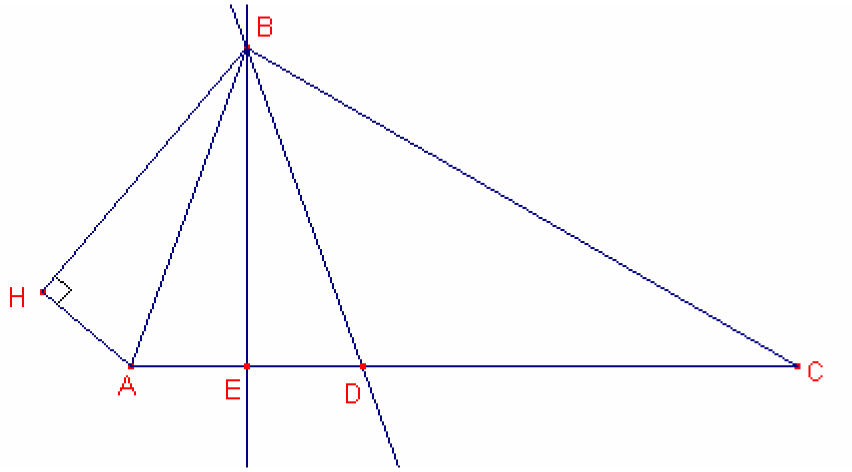


$\angle QPT = \frac{3\alpha}{2}$.
$\angle QXS = 180º - 2\angle QPT = 140º$.
$180º - 2\frac{3\alpha}{2} = 140º$.
Resolent l'equació:
$\alpha = \frac{40º}{3}$.
L'angle central d'un polígon regular és $\frac{360º}{n}$ on n és el nombre de costats.
$\alpha = \frac{40º}{3} = \frac{360º}{n}$.
El nombre de costats és $n = 27$.

595.- En la figura $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BH}$, $\angle ABC = 80^o$, $\angle ACB = 30^o$, $\angle AHB = 90^o$.
Calculeu la mesura de l'angle $x = \angle ABH$.



Solució 1:



$\angle BAC = 70^o$.
Siga BD la bisectriu de l'angle $\angle ABC = 80^o$. Aleshores:
$\angle DBC = 40^o$, $\angle ADB = 70^o$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ADB}$ és isòsceles.
Siga BE la bisectriu de l'angle $\angle ABD = 40^o$.
$\angle DBE = 20^o$, $\angle BED = 90^o$.
En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEC}$, $\angle ECB = 30^o$, aleshores, $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BE}$
Per hipòtesi $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BH}$.
Aleshores, $\overline{BE} = \overline{BH}$, per tant, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHB}$, $\overset{\Delta}{AEB}$ són iguals.
Aleshores, $x = \angle ABH = \angle ABE = 20^o$.

Solució 2:
Siga $\overline{BH} = a$, $\overline{BC} = 2a$.
$\angle BAC = 70^o$.
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{2a}{\sin 70^o} = \frac{\overline{AB}}{\sin 30^o}.$$

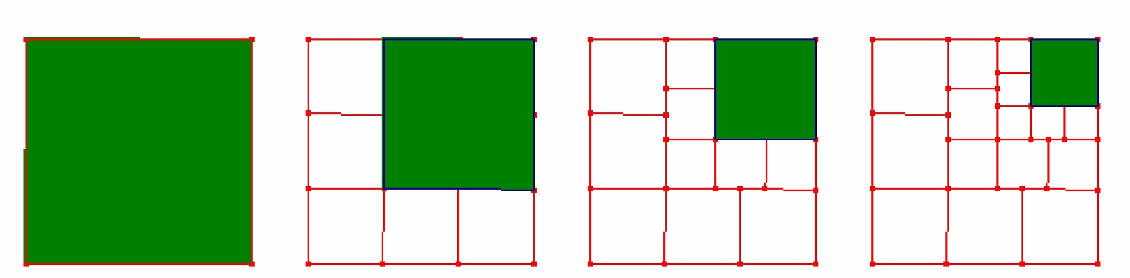
$$\frac{a}{\overline{AB}} = \sin 70^o.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$\cos x = \frac{a}{\overline{AB}}.$$

Aleshores:
$\cos x = \sin 70^o$, per tant, $x = 20^o$.

596.- En cadascun de la següent seqüència de quadrats de costat 27cm s'ha ombrejat un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat del quadrat 4, 5 i el terme general.



Solució.
La successió dels costats dels quadrats ombrejats és:

$$27,\ \frac{2}{3}27,\ \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}27\right),\ \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}27\right)\right),\ \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}27\right)\right)\right),.....$$

$$27,\ \frac{2}{3}27,\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 27,\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 27,\ \left(\frac{2}{3}\right)^4 27,....$$

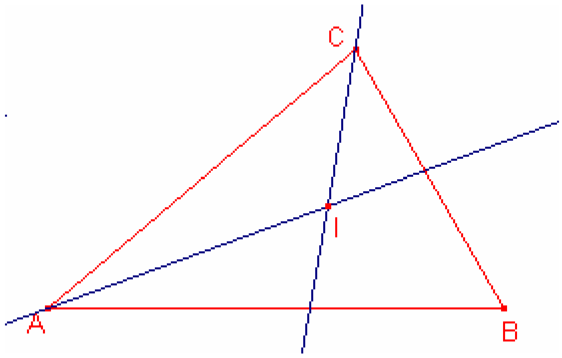
La successió de les àrees dels quadrats ombrejats és:

$$27^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 27^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^4 27^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^6 27^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^8 27^2,....$$

El terme general és:

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2} 27^2.$$

597.- Les bisectrius internes del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'intersecten en el punt I.
Si $\overline{AI} = \overline{BC}$ i $\angle ICA = 2 \cdot \angle IAC$, determineu la mesura de l'angle B del triangle.



Solució 1:
Siga $\alpha = \angle IAC$, $A = 2\alpha$, $B = 4\alpha$.

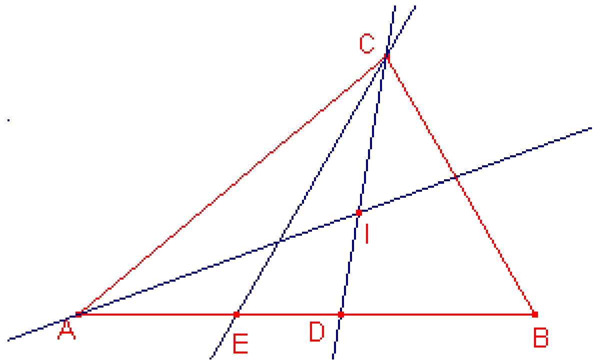
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AIC}$:

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin 3\alpha} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin 6\alpha} \qquad (2)$$

De les expressions (1) (2):
$\sin 3\alpha = \sin 6\alpha$.
$6\alpha = 180º - 3\alpha$. Resolent l'equació:
$\alpha = 20º$.
Aleshores, $B = 180º - 6\alpha = 60º$.
També, $A = 40º$, $C = 80º$.



Solució 2:
Siga $\alpha = \angle IAC$, $A = 2\alpha$, $B = 4\alpha$.
Siga CD la bisectriu de l'angle C.
Siga CE la bisectriu de l'angle $\angle ACD$.
$\angle BEC = \angle CAE + \angle ACE = 3\alpha$. $\angle ECB = 3\alpha$.

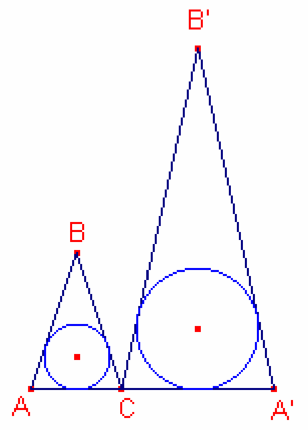
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{EBC}$ és isòsceles, $\overline{BE} = \overline{BC} = a$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AEC}$, $\overset{\Delta}{CIA}$ són iguals ja que tenen els angles corresponents iguals i un costat igual. $\angle AEC = \angle CIA = 180º - 3\alpha$, $\angle CAE = \angle CAI = \alpha$, $\overline{AC} = \overline{AC}$.
Aleshores, $\overline{CE} = AI = a$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{EBC}$ és equilàter. Per tant, $B = \angle CBE = 60º$.

598.- El triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, té base $\overline{AC}=12m$ i altura 18m.

El triangle isòsceles $\overset{\Delta}{A'B'C}$, té base $\overline{A'C}=20m$ i altura 45m,
Les bases dels dos triangles estan alineades.
Calculeu la distancia entre els incentres dels dos triangles.



Solució:

Siga I l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga J l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{A'B'C}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}$. $\overline{AM}=6$, $\overline{BM}=18$.

Siga M' el punt mig del costat $\overline{A'C}$. $\overline{A'M'}=10$, $\overline{B'M'}=45$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\overline{AB}=\sqrt{6^2+18^2}=6\sqrt{10}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'M'B'}$:

$\overline{A'B'}=\sqrt{10^2+45^2}=5\sqrt{85}$.

Siga $r=\overline{IM}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

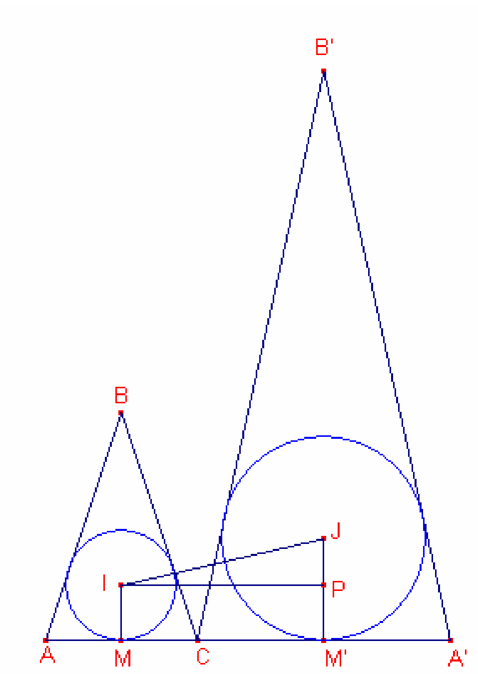
Siga $R=\overline{JM'}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{A'B'C}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BM}}{2}=\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}}{2}r.$$

$\frac{12\cdot 18}{2}=\frac{12\sqrt{10}+12}{2}r$. Resolent l'equació:

$r=2\left(\sqrt{10}-1\right)$.



Anàlogament, aplicant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{A'B'C}$ és:

$\frac{20\cdot 45}{2}=\frac{10\sqrt{85}+20}{2}R$. Resolent l'equació:

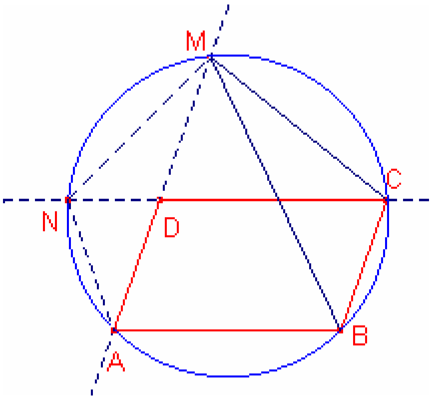
$$R=\frac{10\left(\sqrt{85}-2\right)}{9}.$$

Siga P la projecció de I sobre $\overline{JM'}$.

$\overline{MM'}=16$, $\overline{JP}=R-r=\frac{10}{9}\left(\sqrt{85}-2\right)-2\left(\sqrt{10}-1\right)$.

$$\overline{IJ}=\sqrt{\left(\frac{10}{9}\left(\sqrt{85}-2\right)-2\left(\sqrt{10}-1\right)\right)^2+16^2}\approx 16{,}4216m.$$

599.- La circumferència que passa pels vèrtexs A, B, C del paral·lelogram ABCD talla les rectes AD, CD en els punts M, N, respectivament.
Si $\overline{MB}=4$, $\overline{MC}=3$, $\overline{MD}=2$, determineu la longitud del segment $\overline{MN}$.
Shariguin I154.



Solució:
$\overline{AB}$, $\overline{CN}$ són paral·lels, aleshores:
$\overline{AN}=\overline{BC}$.
$\angle NMA=\angle CMB$, $\angle MNC=\angle MBC$.
Els triangles $\overset{\Delta}{MDN}$, $\overset{\Delta}{MBC}$ són semblants ja que tenen els angles corresponents iguals.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{MN}}{\overline{MB}}.$$
$\frac{2}{3}=\frac{\overline{MN}}{4}$, aleshores:
$$\overline{MN}=\frac{8}{3}.$$

600.- En la següent figura el radi de la circumferència exterior és R. Determineu el radi dels altres dos tipus de circumferències.

Solució:
Siga la circumferència de centre O radi R.
Els arcs que formen la flor són de radi R.
Considerem l'arc de centre J que passa per O, que té radi R.
Siga P el centre de la circumferència de radi $\overline{PM} = \overline{PK} = r$.
$\overline{OP} = R - r$, $\overline{JP} = R + r$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JOP}$:
$(R + r)^2 = R^2 + (R - r)^2$.
Resolent l'equació en la incògnita r:
$r = \frac{1}{4}R$.
Siga Q el centre de la circumferència de radi $\overline{QL} = s$.
$\overline{OQ} = R - 2r - s$, $\overline{JQ} = R + s$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JOQ}$:
$(R + s)^2 = R^2 + \left(R - \frac{1}{2}R - s)\right)^2$.
Resolent l'equació en la incògnita s:
$s = \frac{1}{12}R$.