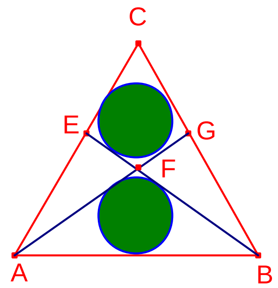
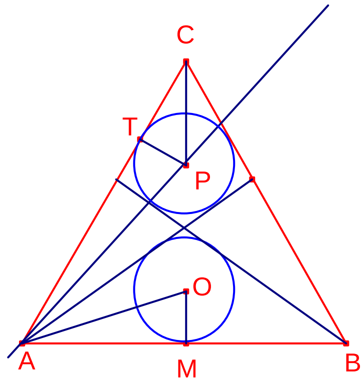
Problemes de Geometria per a l'ESO 61

601.- En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat c s'han inscrit dues circumferències d'igual radi, una tangent al costat $\overline{AB}$ i als segments $\overline{AG}$, $\overline{BE}$, l'altra inscrita en el quadrilàter CEFG. Determineu la mesura dels radis.



Solució:
Siga r el radi de les dues circumferències.
Siga $\alpha = \angle OAM$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAM}$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2r}{c} \qquad (1)$$

$\angle PCT = 30^\circ$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCT}$:

$\overline{CT} = r\sqrt{3}$.

$\overline{AT} = c - r\sqrt{3}$.

$\angle PAT = \frac{60^\circ - 2\alpha}{2} = 30^\circ - \alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAT}$:

$$\frac{r}{c - r\sqrt{3}} = \mathrm{tg}(30^\circ - \alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{tg}\alpha}.$$

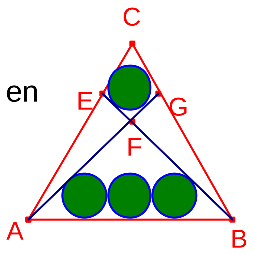
$$\frac{r}{c - r\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3\mathrm{tg}\alpha}{3 + \sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha} \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$\frac{r}{c - r\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3\frac{2r}{c}}{3 + \sqrt{3}\frac{2r}{c}}.$$ Simplificant:

$4\sqrt{3} \cdot r^2 - 12cr + \sqrt{3} \cdot c^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} c.$$



602.- En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat c s'han inscrit quatre circumferències d'igual radi, tres tangents al costat $\overline{AB}$, l'altra inscrita en el quadrilàter CEFG.
Determineu la mesura dels radis.

Solució:
Siga r el radi de les dues circumferències.
Siga $\alpha = \angle OAM$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAM}$:

$$tg\alpha = \frac{2r}{c-4r} \qquad (1)$$

$\angle PCT = 30^{o}$.

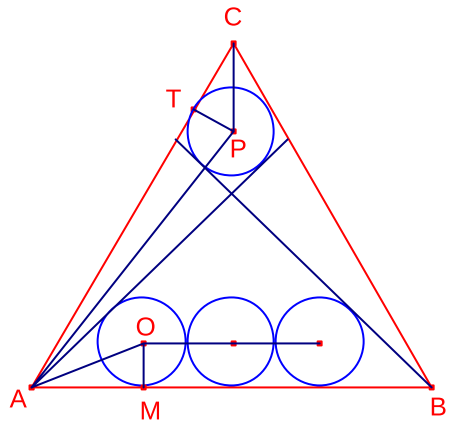
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCT}$:

$\overline{CT} = r\sqrt{3}$.

$\overline{AT} = c - r\sqrt{3}$.

$\angle PAT = \frac{60^{o}-2\alpha}{2} = 30^{o}-\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAT}$:



$$\frac{r}{c-r\sqrt{3}} = tg(30^{o}-\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - tg\alpha}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}tg\alpha}.$$

$$\frac{r}{c-r\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-3tg\alpha}{3+\sqrt{3}tg\alpha} \qquad (2)$$

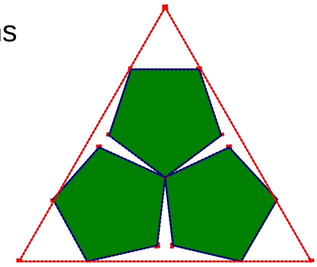
Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$\frac{r}{c-r\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-3\frac{2r}{c-4r}}{3+\sqrt{3}\frac{2r}{c-4r}}.$$ Simplificant:

$\left(24+4\sqrt{3}\right)r^{2} - \left(12+4\sqrt{3}\right)cr + \sqrt{3}\cdot c^{2} = 0$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r = \frac{2\sqrt{3}-1}{22}c.$$

603.- En un triangle equilàter de costat c s'han inscrit 3 pentàgons regulars iguals que tenen un vèrtex comú (veure figura).
Determineu el costat de cada pentàgon regular.



Solució:

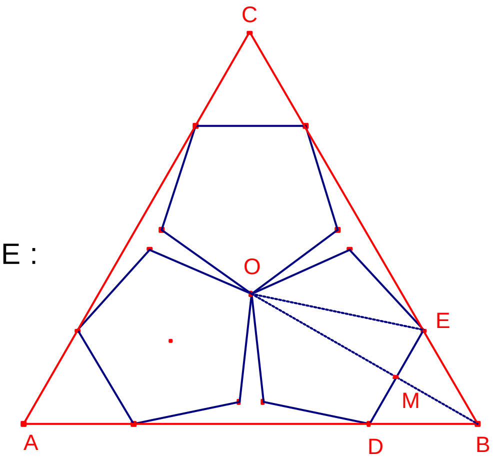
Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = c$.
Per simetria de la figura, el vèrtexs comú O als tres pentàgons és el baricentre del triangle.

$\overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

Siga $\overline{DE} = d$ costat del pentàgon.

Siga M el punt mig del costat $\overline{DE}$.

$\overline{OE} = \Phi d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}d$. $\overline{ME} = \frac{d}{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OME}$:

$\overline{OM} = d\sqrt{\Phi^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = d\sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}} = d\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BME}$:

$\overline{BM} = d\frac{\sqrt{3}}{2}$.

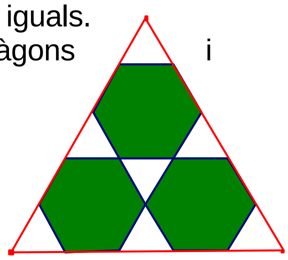
$\overline{OB} = \overline{OM} + \overline{BM}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}c = d\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Resolent l'equació en la incògnita d:

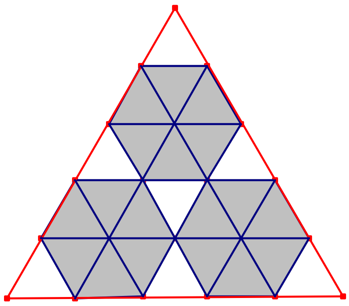
$d = \frac{2\sqrt{3}}{3\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{3}\right)}c$.

$d \approx 0{,}2401 \cdot c$.

604.- En un triangle equilàter s'han inscrit tres hexàgons regulars iguals. Determineu la proporció entre la suma de les àrees dels tres hexàgons i l'àrea del triangle.

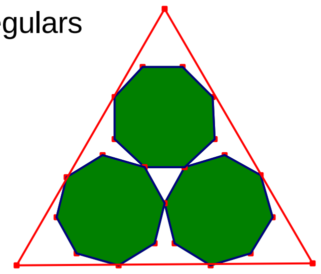


Solució:



La proporció és $\frac{18}{25}$.

605.- En un triangle equilàter de costat c s'han inscrit 3 octògons regulars iguals (veure figura).
Determineu el costat de cada octògon regular.

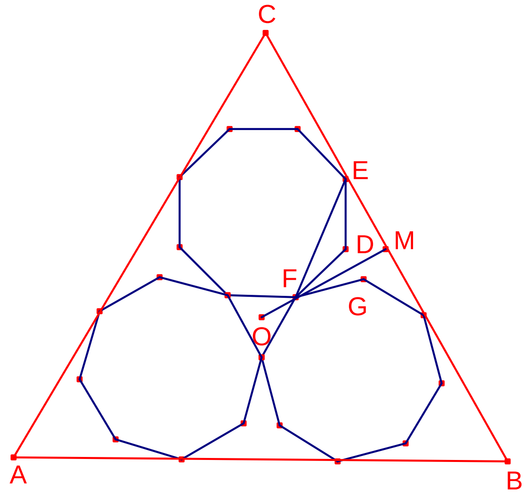


Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = c$.
Siga O el baricentre del triangle.

$\overline{OM} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}c$.

Siga $\overline{DE} = d$ costat del pentàgon.



$\overline{OF} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}d$.

$\angle EFD = \dfrac{45^o}{2}$, $\angle FDE = 135^o$.

$\angle DFG = 30^o$.

$\angle EFM = \dfrac{75^o}{2}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{FDE}$:

$$\frac{d}{\sin\frac{45^o}{2}} = \frac{\overline{EF}}{\sin 135^o}.$$

$$\frac{d}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\overline{EF}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\overline{EF} = d\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\overset{\Delta}{FME}$

$$\overline{FM} = \overline{EF}\cos\frac{75^o}{2} = d\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4} = d\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{2}.$$

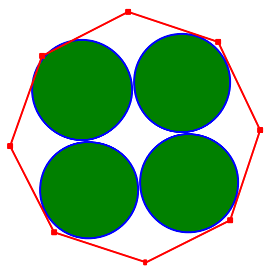
$\overline{OM} = \overline{OF} + \overline{FM}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{6}c = d\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{2}\right)$$. Resolent l'equació en la incògnita d:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}}c.$$

$d \approx 0{,}14128\cdot c$.

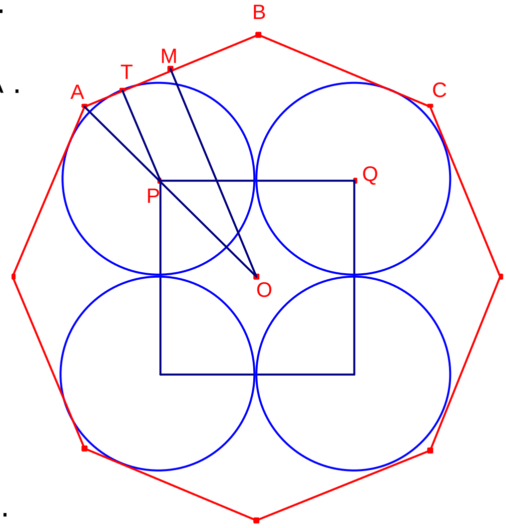
606.- En un octògon regular de costat c s'han inscrit quatre circumferències d'igual radi tangents (veure figura).
Calculeu el radi de les circumferències.



Solució:

Siga l'octògon regular de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\angle BAO = \dfrac{135^o}{2}$. $\sin\dfrac{135^o}{2} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\cos\dfrac{135^o}{2} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$.

$$\overline{OA} = \frac{c}{2\cos\frac{135^o}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}}{2}c.$$

Siga r el radi de les quatre circumferències.
Els centres de les quatre circumferències formen un quadrat de entre O i costat 2r.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$\overline{OP} = r\sqrt{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTA}$.

$$\overline{AP} = \frac{r}{\sin\frac{135^o}{2}} = \frac{r}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = r\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}.$$

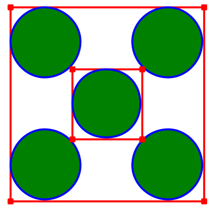
$\overline{OA} = \overline{OP} + \overline{AP}$.

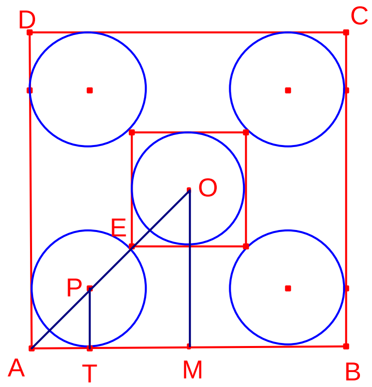
$\dfrac{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}}{2}c = \left(\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)} + \sqrt{2}\right)r$. Resolent l'equació:

$$r = \frac{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}}{2\left(\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)} + \sqrt{2}\right)}c.$$

$r \approx 0{,}4005 \cdot c$.

607.- En un quadrat de costat c s'han dibuixat un altre quadrat d'igual centre i costats paral·lels al primer i cinc circumferències d'igual radi. Una circumferència inscrita en el quadrat menut i les altres quatre tangents cadascuna a dos costats del quadrat gran i que passen per un vèrtex del quadrat interior menut.
Determineu el radi de les cinc circumferències iguals.





Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat c i centre O.
Siga r el radi de les cinc circumferències.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:

$\overline{AP} = \overline{OE} = \sqrt{2}r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

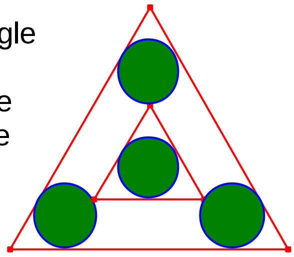
$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

$\overline{AO} = 2 \cdot \overline{AP} + \overline{PE}$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}c = 2\sqrt{2}r + r$. Resolent l'equació en la incògnita r:

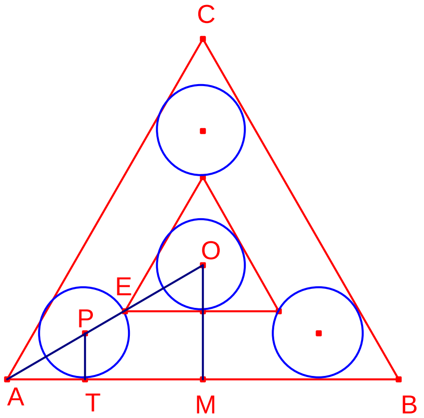
$r = \frac{4 - \sqrt{2}}{14}c$.

608.- En un triangle equilàter de costat c s'han dibuixat un altre triangle equilàter d'igual baricentre i costats paral·lels al primer i quatre circumferències d'igual radi. Una circumferència inscrita en el triangle menut i les altres tres tangents, cadascuna, a dos costats del triangle gran i que passen per un vèrtex del triangle interior menut. Determineu el radi de les quatre circumferències iguals.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat c i baricentre O.
Siga r el radi de les quatre circumferències.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:

$\overline{AP} = \overline{OE} = 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

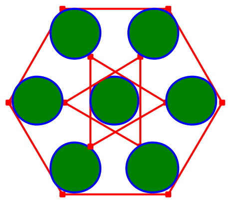
$\overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

$\overline{AO} = 2 \cdot \overline{AP} + \overline{PE}$.

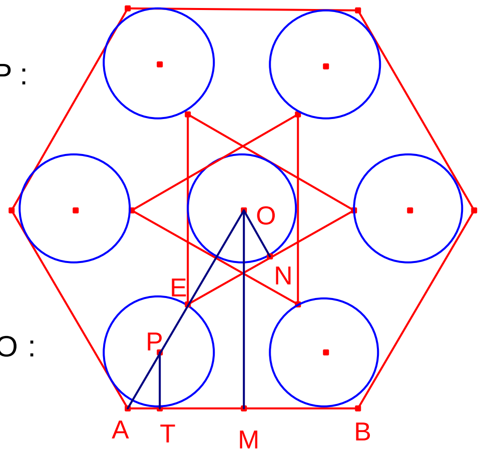
$\frac{\sqrt{3}}{3}c = 2 \cdot 2r + r$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{\sqrt{3}}{15}c$.

609.- En un hexàgon regular de costat c s'han dibuixat dos triangles equilàters regular d'igual centre i set circumferències d'igual radi. Una circumferència inscrita als dos triangles equilàters i les altres sis tangents cadascuna a dos costats de l'hexàgon gran i que passen per un vèrtex dels triangles.
Determineu el radi de les set circumferències iguals.



Solució:
Siga L'hexàgon regular de costat c i centre O.
Siga r el radi de les cinc circumferències.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:

$\overline{AP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EON}$:

$\overline{OE} = 2r$.

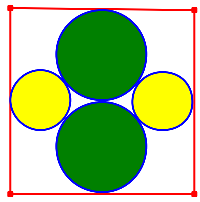
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$\overline{AO} = c$.

$\overline{AO} = \overline{AP} + \overline{PE} + \overline{OE}$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{2\sqrt{2}}{3}r + r + 2r$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{9-2\sqrt{3}}{23}c$.



En un quadrat de costat c s'han inscrit quatre circumferències (veure figura).
Calculeu els radis dels dos tipus de circumferències.

Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat c de centre O.
Siga P el centre de la circumferència menuda.
Siga Q el centre de la circumferència gran.
El radi de la circumferència gran és:

$\overline{OQ} = \frac{c}{4}$.

Siga $r = \overline{PT}$ radi de la circumferència menuda.

$\overline{OP} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{PQ} = \frac{c}{4} + r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$

$\left(\frac{c}{4} + r\right)^2 = \left(\frac{c}{4}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - r\right)^2$. Resolent l'equació:

$r = \frac{c}{6}$.