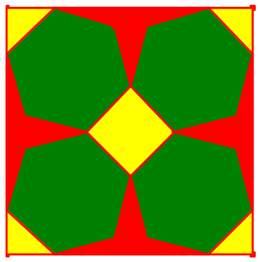
Problemes de Geometria per a l'ESO 62

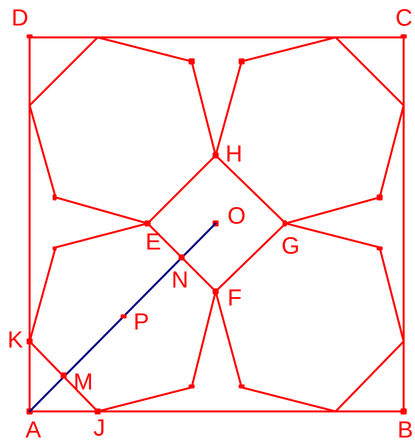
611.- En un quadrat de costat c s'han inscrit un altre quadrat i quatre hexàgons regulars d'igual costat (veure figura). Determineu la mesura dels costats del quadrat menut i dels hexàgons.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.

Siga EFGH el quadrat de costat $\overline{EF} = x$ i centre O.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{JK}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{EF}$.

Siga P el centre de l'hexàgon regular de costa $\overline{EF}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMJ}$:

$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ENP}$:

$\overline{PN} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$\overline{MN} = 2 \cdot \overline{PN} = x\sqrt{3}$.

$\overline{ON} = \frac{1}{2}\overline{FG} = \frac{x}{2}$.

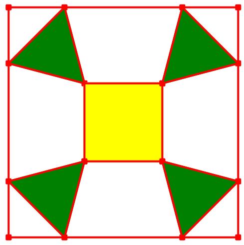
$\overline{OA} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{ON}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}c = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)x.$$

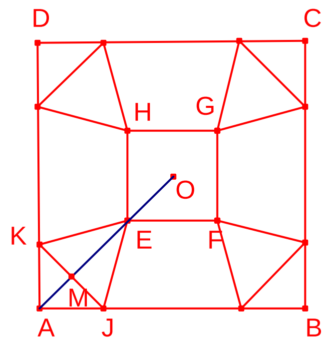
Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}c.$$

612.- En un quadrat de costat c s'han inscrit un altre quadrat i quatre triangles equilàters d'igual costat (veure figura).
Determineu la mesura dels costats del quadrat menut i dels triangles.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
Siga EFGH el quadrat de costat $\overline{EF} = x$ i centre O.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

$$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

Siga M el punt mig del costat $\overline{JK}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMJ}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EMJ}$:

$$\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EOF}$:

$$\overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

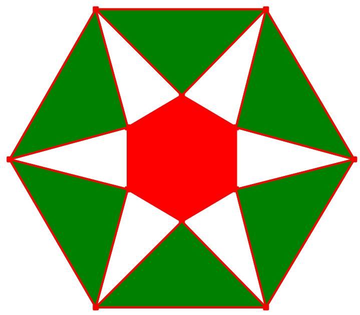
$$\overline{OA} = \overline{AM} + \overline{ME} + \overline{OE}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}c = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x.$$

Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{4-\sqrt{6}}{5}c.$$

613.- Sobre els costats d'un hexàgon regular i cap a l'interior de l'hexàgon s'han dibuixat sis triangles rectangles i isòsceles iguals (veure figura).
Els vèrtexs dels sis triangles, interiors a l'hexàgon, formen un hexàgon regular.
Determineu la proporció entre els dos hexàgons regulars.



Solució:

Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.

Siga GHIJKL l'hexàgon regular interior de costat $\overline{GH} = x$ i centre O.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBO}$:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c .$$

El triangle $\overset{\Delta}{MBG}$ és rectangle i isòsceles aleshores:

$$\overline{GM} = \overline{MB} = \frac{1}{2}c .$$

$$\overline{OG} = \overline{GH} = x .$$

$$\overline{OM} = \overline{GM} + \overline{OG} .$$

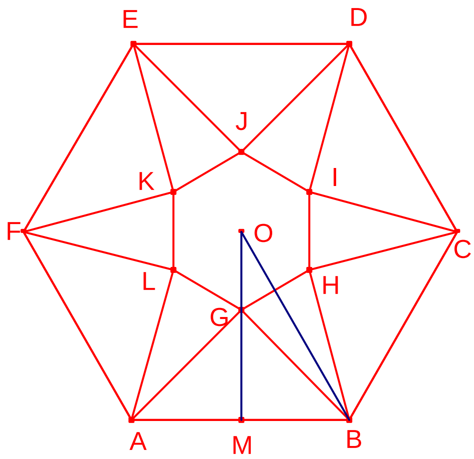
$$\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{1}{2}c + x .$$

Resolent l'equació:

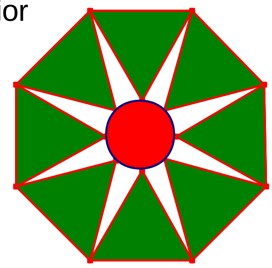
$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}c .$$

La proporció entre els dos hexàgons regulars és:

$$\frac{x}{c} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} .$$



614.- Sobre els costats d'un octògon regular de costat c, i cap a l'interior de l'hexàgon, s'han dibuixat vuit triangles equilàters.
Pels vèrtexs dels vuit triangles, interiors a l'octògon, s'ha dibuixat una circumferència.
Determineu la mesura del radi de la circumferència.



Solució:

Siga $r=\overline{OM}$ el radi de la circumferència.

Siga ABCDEFGH l'octògon regular de costat $\overline{AB}=c$ i centre O.

Siga K el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBM}$:

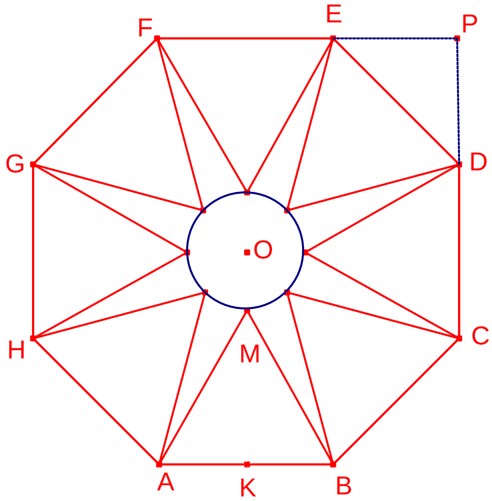
$$\overline{KM}=\frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Les rectes EF, CD es tallen en el punt P.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{DEP}$:

$$\overline{DP}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$\overline{OK}=\frac{2\cdot\overline{DP}+\overline{CD}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}c$$



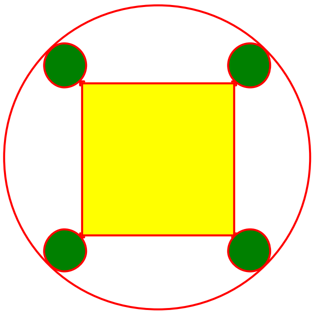
$$\overline{OK}=\overline{KM}+\overline{OM}.$$

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2}c=\frac{\sqrt{3}}{2}c+r.$$

Resolent l'equació:

$$r=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}c.$$

615.- En una circumferència de radi R s'ha dibuixat un quadrat de costat R (veure figura).
La circumferència i el quadrat tenen el mateix centre.
S'han dibuixat 4 circumferències tangents a la circumferència inicial i que passen cadascuna per un vèrtex del quadrat.
Determineu la mesura dels radis de les quatre circumferències menudes.

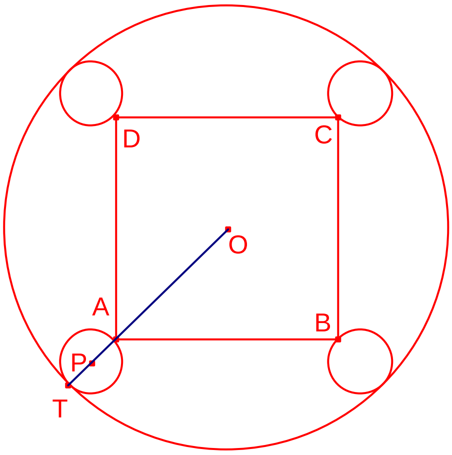


Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $R = \overline{OT}$.

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = R$.

Siga la circumferència de centre P i radi $r = \overline{PT} = \overline{PA}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

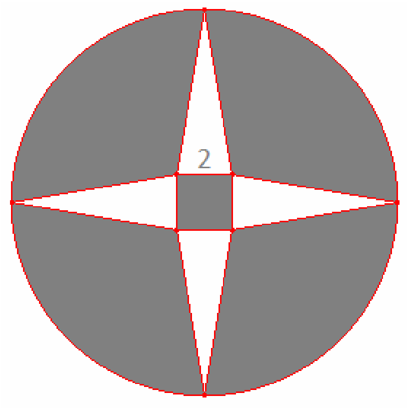
$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

$\overline{OT} = 2 \cdot \overline{PA} + \overline{OA}$.

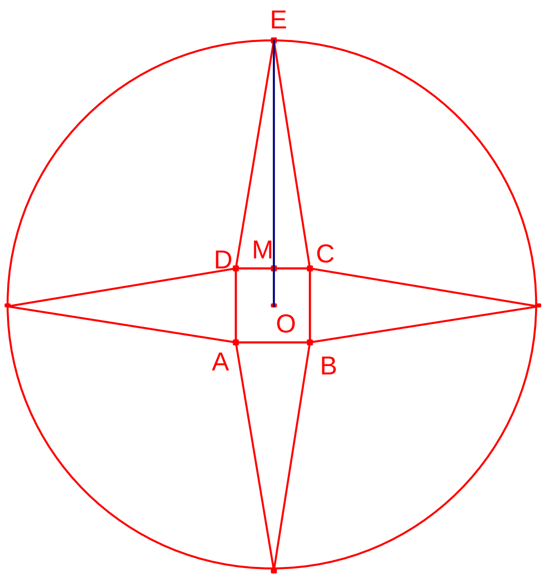
$R = 2r + \frac{\sqrt{2}}{2}R$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{2-\sqrt{2}}{4}R$.

616.- Una circumferència de diàmetre 14cm té dibuixat un quadrat de costat 2cm i quatre triangles isòsceles iguals de base un costat del quadrat.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.

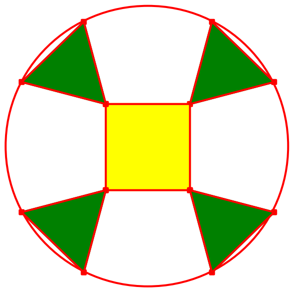


Solució:
El radi de la circumferència és $\overline{OE}=7$.
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=2$ i centre O.
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.
$\overline{OM}=1$.
Aleshores, $\overline{ME}=6$.
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del cercle menys quatre vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:



$$S=\pi\cdot 7^2-4\left(\frac{2\cdot 6}{2}\right)=49\pi-24\approx 129.94\text{cm}^2$$

617.- En una circumferència de radi R s'han dibuixat un quadrat i quatre triangles equilàters, tots cinc d'igual costat (veure figura). Determineu la mesura d'aquests costats.

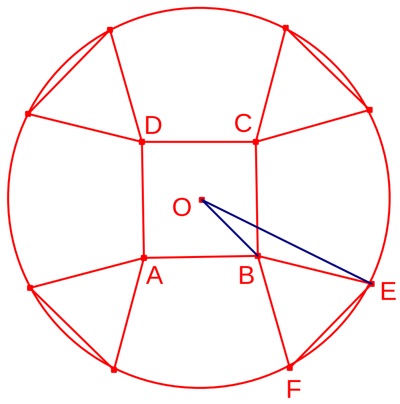


Solució:

Siga el quadrat ABCD i centre O de costat $\overline{AB} = c$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BEF}$ de costat $BE = c$.

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OE} = R$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBC}$:

$$\overline{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}c,$$

Siga M el punt mig de costat $\overline{EF}$.

$\angle EBM = 30^o$, aleshores, $\angle OBE = 150^o$.

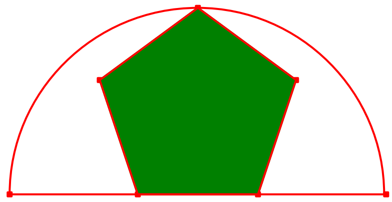
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OBE}$.

$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 + c^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}c^2\cos 150^o.$$

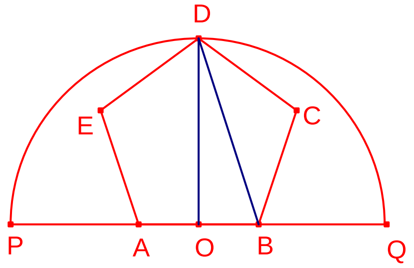
$$R^2 = \frac{3}{2}c^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}c^2\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Resolent l'equació en la incògnita c:

$$c = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{6}}{3}}R.$$



618.- En un semicercle de radi r s'ha inscrit un pentàgon regular (veure figura).
Determineu la mesura del costat del pentàgon.



Solució:

Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{PQ} = 2r$.

Siga ABCDE el pentàgon regular de costat $\overline{AB} = c$.

$\overline{OD} = r$, $\overline{OB} = \dfrac{c}{2}$.

Per la propietat de la diagonal del pentàgon regular:

$\overline{BD} = \Phi c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}c$.

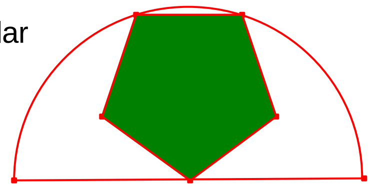
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBD}$:

$(\Phi c)^2 = r^2 + \left(\dfrac{c}{2}\right)^2$.

$r^2 = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{4}c^2$. Resolent l'equació:

$c = \sqrt{\dfrac{4\left(5-2\sqrt{5}\right)}{5}}r$.

619.- En un semicercle de radi r s'ha inscrit un pentàgon regular (veure figura).
Determineu la mesura del costat del pentàgon.



Solució:

Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{PQ} = 2r$.

Siga OBCDE el pentàgon regular de costat $\overline{OB} = c$.

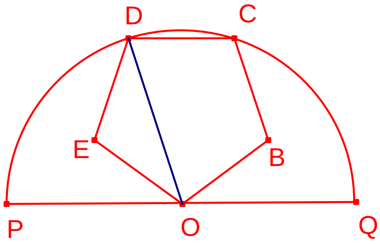
$\overline{OD} = r$.

Per la propietat de la diagonal del pentàgon regular:

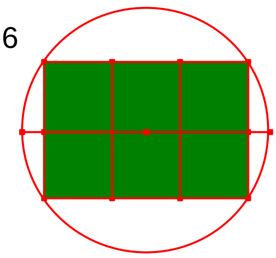
$\overline{OD} = \Phi c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}c$.

$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}c$. Resolent l'equació:

$c = \frac{1}{\Phi}r = (\Phi - 1)r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}r$.



620.- Sobre el diàmetre d'una circumferència de radi r s'han dibuixat 6 quadrats iguals (veure figura).
Determineu la suma de les àrees dels 6 quadrats.

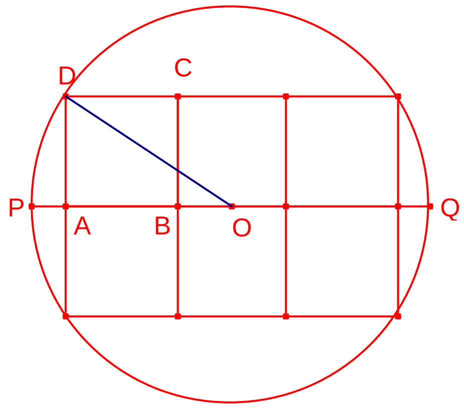


Solució:

Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{PQ} = 2r$.

Siga ABCD quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

$\overline{OD} = r$, $\overline{OA} = \frac{2c}{2}$, $\overline{AD} = c$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAD}$:

$$r^2 = c^2 + \left(\frac{3c}{2}\right)^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBD}$:

$$c^2 = \frac{4}{13}r^2.$$

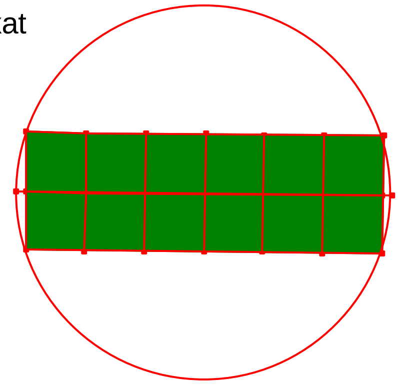
L'àrea total dels sis quadrats és:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBD}$:

$$S = 6c^2 = 6\frac{4}{13}r^2 = \frac{24}{13}r^2.$$

Generalització:

Sobre el diàmetre d'una circumferència de radi r s'han dibuixat 2n quadrats iguals (veure figura).
Determineu la suma de les àrees de tots els quadrats.



Solució:

$$S = 2n\frac{4}{4+n^2}r^2.$$