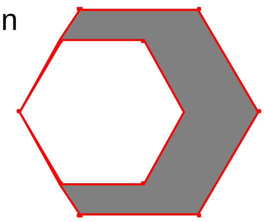
Problemes de Geometria per a l'ESO 63

621.- Els perímetres dels dos hexàgons regulars de la figura estan en proporció 13:24.

Si l'àrea de l'hexàgon menut és 1183cm^2, calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

Siga S_g la superfície de l'hexàgon gran.

Si dues figures són proporcionals les seues àrees són proporcionals i la seua raó és igual al quadrat de la proporció de les figures.

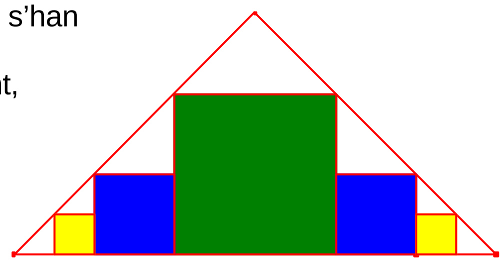
$\frac{1183}{S_g} = \left(\frac{13}{24}\right)^2$. Resolent l'equació:

$S_g = 4032\text{cm}^2$.

L'àrea de la zona ombrejada és igual a la diferència de les àrees dels dos hexàgons regulars.

$S = S_g - 1183 = 4032 - 1183 = 2849\text{cm}^2$.

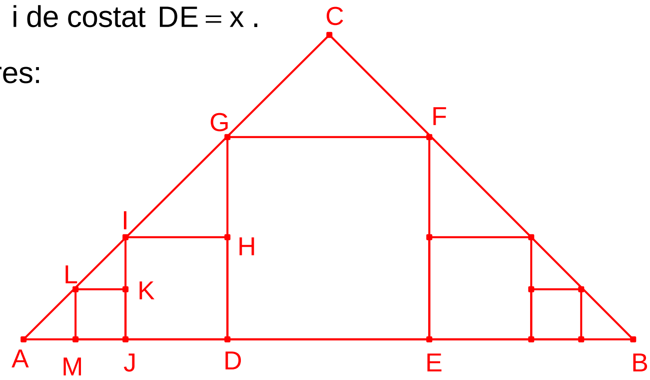
622.- En un triangle rectangle i isòsceles d'hipotenusa c s'han inscrit cinc quadrats (veure la figura).
Si construïm infinits quadrats amb el mateix procediment, determineu la suma de les àrees dels infinits quadrats.



Solució:

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ d'hipotenusa $\overline{AB} = c$.

Siga el quadrat DEFG inscrit en el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i de costat $\overline{DE} = x$.

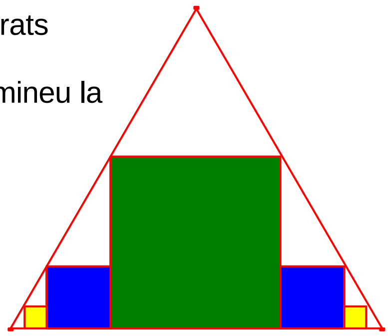


El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADG}$ és isòsceles, aleshores:
$\overline{AD} = \overline{DG} = \overline{DE} = x$.
Aleshores:
$\overline{AB} = c = 3x$, per tant, $x = \frac{c}{3}$.
L'àrea del quadrat DEFFG és
$S_{DEFFG} = x^2 = \frac{1}{9}c^2$.
$\overline{DH} = \overline{HI} = \overline{GH} = \frac{x}{2}$.
$\overline{MJ} = \overline{JK} = \overline{KI} = \frac{x}{4}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADG}$, $\overset{\Delta}{AJI}$ són proporcionals i la raó 2:1.
La suma dels dos quadrats blaus és:
$$s_1 = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{36}c^2.$$
La suma dels dos quadrats grocs és:
$$s_2 = 2\left(\frac{x}{4}\right)^2 = 2\frac{1}{144}c^2.$$
Aleshores, les àrees dels infinits quadrats formen una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{4}$

La suma dels infinits quadrats és:
$$S = S_{DEFG} + \frac{s_1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{9}c^2 + \frac{2\frac{1}{36}c^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{27}c^2.$$

623.- En un triangle equilàter de costat c s'han inscrit cinc quadrats (veure la figura).
Si construïm infinits quadrats amb el mateix procediment, determineu la suma de les àrees dels infinits quadrats.

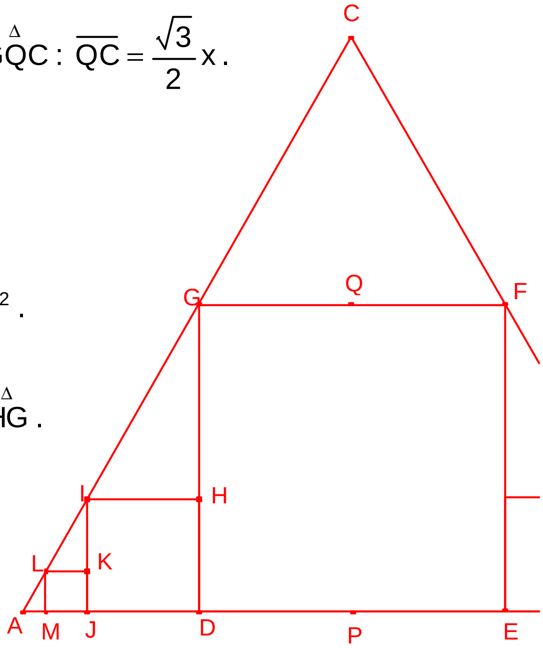


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$: $\overline{PC} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Siga el quadrat DEFG inscrit en el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i de costat $\overline{DE} = x$.
Siga Q el punt mig del costat $\overline{FG}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GQC}$: $\overline{QC} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$\overline{PC} = \overline{PQ} + \overline{QC}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}c = x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$. Resolent l'equació:

$x = \left(2\sqrt{3} - 3\right)c$.

L'àrea del quadrat DEFG és: $S_{DEFFG} = x^2 = \left(2\sqrt{3} - 3\right)^2 c^2$.

Siga el quadrat DHIJ de costat $\overline{DH} = x_1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IHG}$.

$\overline{HG} = \sqrt{3} \cdot x_1$.

$\overline{DG} = \overline{DH} + \overline{HG}$

$x = x_1 + \sqrt{3} \cdot x_1$. Resolent l'equació: $x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x$.

Siga el quadrat JKLM de costat $\overline{JK} = x_2$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AJI}$, $\overset{\Delta}{ADG}$ són proporcionals i la raó és: $\frac{x_1}{x} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

Aleshores, les àrees dels infinits quadrats formen una progressió geomètrica de raó $\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2$.

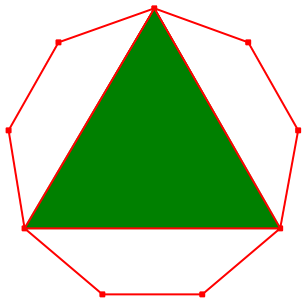
La suma dels dos quadrats blaus és: $s_1 = 2(x_1)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2 \left(2\sqrt{3} - 3\right)^2 c^2$.

La suma dels dos quadrats grocs és: $s_2 = 2(x_2)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^4 \left(2\sqrt{3} - 3\right)^2 c^2$.

La suma dels infinits quadrats és:

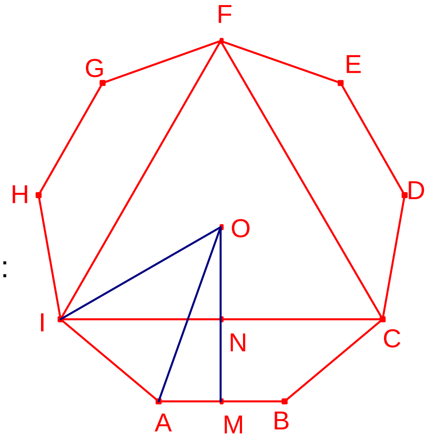
$$S = S_{DEFG} + \frac{s_1}{1 - \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2} = \left(2\sqrt{3} - 3\right)^2 c^2 + \frac{2\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2 \left(2\sqrt{3} - 3\right)^2 c^2}{1 - \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2}.$$

624.- Un polígon regular de 9 costats té inscrit un triangle equilàter. Determineu la raó de proporcionalitat de les àrees de les dues figures.



Solució:
Siga l'eneàgon ABCDEFGHI de centre O i radi de la circumferència circumscrita $\overline{OA} = r$.

Siga $\overset{\Delta}{CFI}$ el triangle inscrit en l'eneàgon.



$\angle AOB = \dfrac{360^o}{9} = 40^o$, $\angle IOC = \dfrac{360^o}{3} = 120^o$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{IC}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$\overline{AB} = 2r \cdot \cos 70^o$, $\overline{OM} = r \cdot \sin 70^o$
L'àrea de l'eneàgon és:

$$S_9 = \frac{9\overline{AB} \cdot \overline{OM}}{2} = \frac{9}{2} 2r^2 \sin 70^o \cdot \cos 70^o = \frac{9}{2} r^2 \sin 40^o .$$

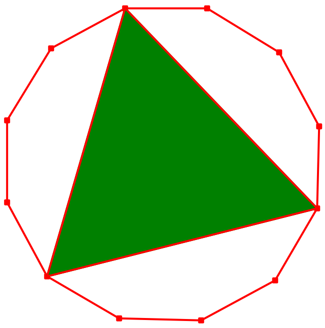
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{INO}$:
$\overline{IC} = 2r \cdot \cos 30^o$, $\overline{ON} = r \cdot \sin 30^o$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CFI}$ és:

$$S_3 = \frac{3\overline{IC} \cdot \overline{ON}}{2} = \frac{3}{2} 2r^2 \sin 30^o \cdot \cos 30^o = \frac{3}{2} r^2 \sin 60^o .$$

La proporció entre les àrees és:.

$$\frac{S_3}{S_9} = \frac{\frac{3}{2} r^2 \sin 60^o}{\frac{9}{2} r^2 \sin 40^o} = \frac{\sqrt{3}}{6 \sin 40^o} \approx 0'4491.$$

625.- Un dodecàgon regular té inscrit un triangle equilàter. Determineu la raó de proporcionalitat de les àrees de les dues figures.

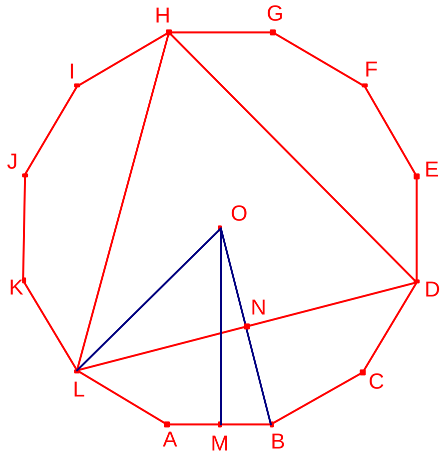


Solució:
Siga el dodecàgon ABCDEFGHIJKL de centre O i radi de la circumferència circumscrita $\overline{OA} = r$.

Siga $\overset{\Delta}{DHL}$ el triangle inscrit en el dodecàgon.

$\angle AOB = \dfrac{360^o}{12} = 30^o$, $\angle IOC = \dfrac{360^o}{3} = 120^o$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{LD}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$\overline{AB} = 2r \cdot \cos 75^o$, $\overline{OM} = r \cdot \sin 75^o$
L'àrea del dodecàgon és:

$$S_{12} = \frac{12\overline{AB} \cdot \overline{OM}}{2} = 6 \cdot 2r^2 \sin 75^o \cdot \cos 75^o = 3r^2.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LNO}$:
$\overline{LD} = 2r \cdot \cos 30^o$, $\overline{ON} = r \cdot \sin 30^o$

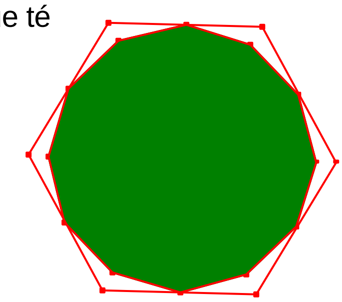
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DHL}$ és:

$$S_3 = \frac{3\overline{LD} \cdot \overline{ON}}{2} = \frac{3}{2} 2r^2 \sin 30^o \cdot \cos 30^o = \frac{3}{2} r^2 \sin 60^o.$$

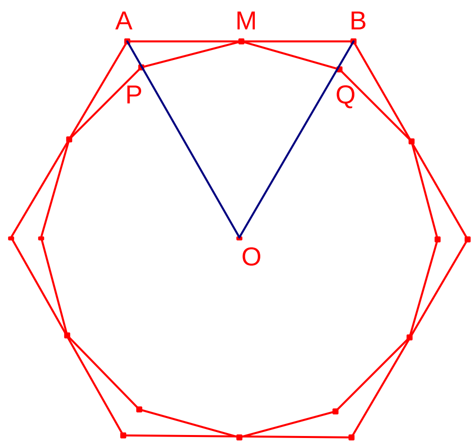
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_3}{S_{12}} = \frac{\frac{3}{2} r^2 \sin 60^o}{3r^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0'4330.$$

626.- En un hexàgon regular s'ha inscrit un dodecàgon regular que té sis vèrtexs en els punts migs de l'hexàgon.
Determineu la proporció entre els perímetres dels dos polígons.



Solució:



Siga l'hexàgon regular de costat $\overline{AB} = c$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga el dodecàgon regular de costats $\overline{PM} = \overline{QM} = d$
L'angle interior del dodecàgon regular és $\angle PMQ = 150^{o}$.
$\angle AMP = 15^{o}$.
$\angle BAO = 60^{o}$.
Per tant, $\angle APM = 105^{o}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APM}$:

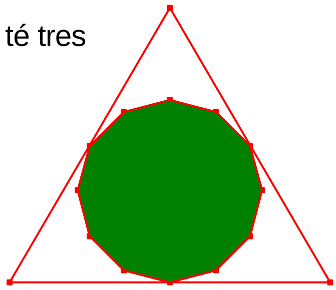
$$\frac{c}{2\sin 105^{o}} = \frac{d}{\sin 60^{o}}.$$

$$\frac{d}{c} = \frac{\sin 60^{o}}{2\sin 105^{o}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

La proporció entre els perímetres dels dos polígons és:

$$\frac{12d}{6c} = 2\frac{d}{c} = 2\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}.$$

627.- En un triangle equilàter s'ha inscrit un dodecàgon regular que té tres vèrtexs en els punts migs del triangle.
Determineu la proporció entre els perímetres dels dos polígons.



Solució:

Siga el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = c$.

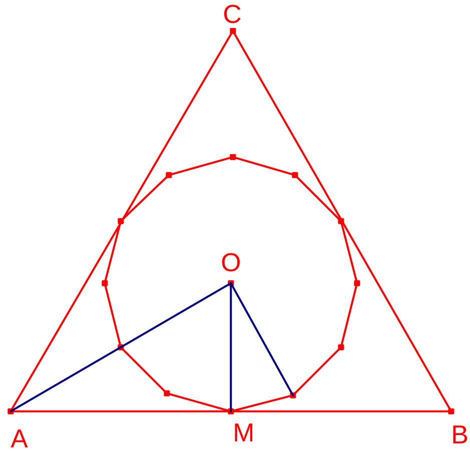
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\angle OAM = 30^o$.

$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OA}$, $\overline{AM} = \frac{1}{2}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OAM}$:

$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$.



Siga el dodecàgon regular de costat $\overline{PM} = d$.

L'angle central del dodecàgon regular és $\angle POM = 30^o$.

Per tant, $\angle OMP = 75^o$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{OPM}$:

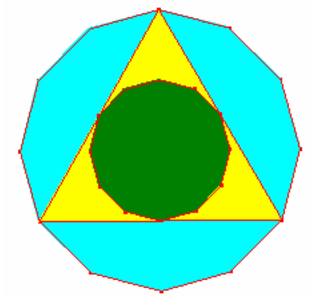
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}c}{\sin 75^o} = \frac{d}{\sin 30^o}.$$

$$\frac{c}{d} = \frac{\sin 75^o}{\frac{\sqrt{3}}{6}\sin 30^o} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{12}} = 3\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

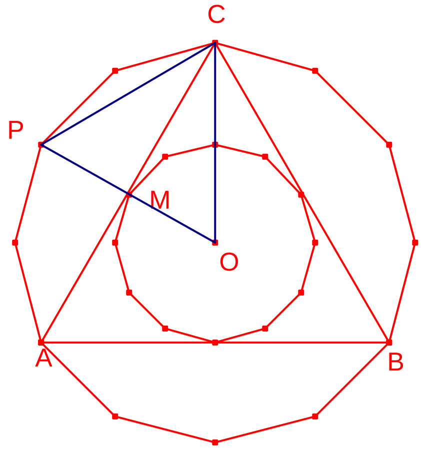
La proporció entre els perímetres dels dos polígons és:

$$\frac{3c}{12d} = \frac{1}{4}\frac{c}{d} = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right).$$

628.- En un dodecàgon regular s'ha inscrit un triangle equilàter i en el triangle equilàter s'ha inscrit un dodecàgon regular.
Determineu la proporció entre els dos dodecàgons.



Solució:



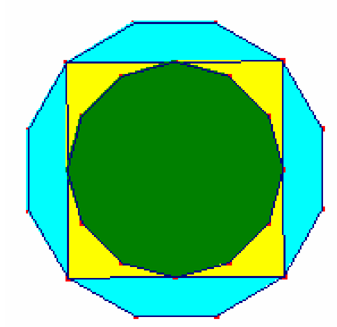
Notem que el triangle $\overset{\Delta}{OPC}$ és equilàter.

$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OP}$.

La proporció entre els dos dodecàgons és:

$\frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{1}{2}$.

629.- En un dodecàgon regular s'ha inscrit un quadrat i en el quadrat s'ha inscrit un dodecàgon regular. Determineu la proporció entre les àrees dels dos dodecàgons.



Solució:

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{OPA}$ és rectangle i isòsceles.

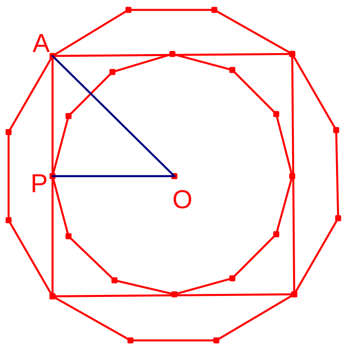
$\overline{OA}=\overline{OP}\sqrt{2}$.

La proporció entre els dos dodecàgons és:

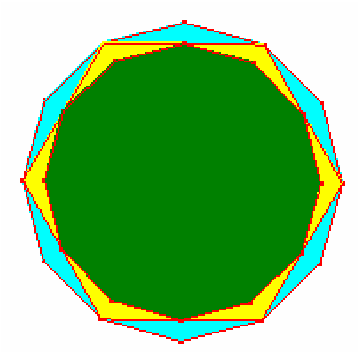
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La proporció entre les àrees dels dos dodecàgons és:

$$\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$



630.- En un dodecàgon regular s'ha inscrit un hexàgon regular i en l'hexàgon s'ha inscrit un dodecàgon regular. Determineu la proporció entre les àrees dels dos dodecàgons.



Solució:

$\angle AOP = 30^{\circ}$

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{OPA}$ és rectangle.

$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{OA}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPA}$

$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

La proporció entre les àrees dels dos dodecàgons és:

$\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}\right)^2 = \frac{3}{4}$.