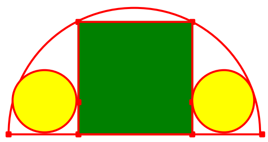
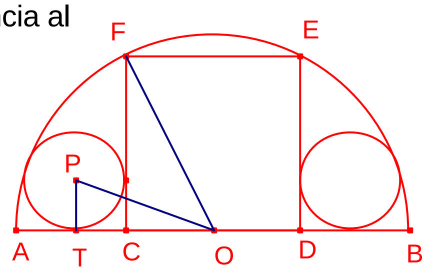
Problemes de Geometria per a l'ESO 64

631.- En un semicercle de radi R s'ha inscrit un quadrat i dues circumferències tangents a la semicircumferència, el quadrat i el diàmetre.
Determineu el radi de les dues circumferències menudes.



Solució:
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga el quadrat CDEF inscrit en el semicercle de costat $\overline{CD} = x$.
Siga la circumferència de centre P tangent a la semicircumferència al segment $\overline{CF}$ i tangent al diàmetre en el punt T.
Siga $\overline{PT} = r$ el seu radi.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COF}$:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2 .$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5} R \qquad (1)$$

$$\overline{OT} = \overline{OC} + \overline{CT} = \frac{x}{2} + r . \quad \overline{OP} = R - r .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{TOP}$:

$$r^2 + \left(\frac{x}{2} + r\right)^2 = (R - r)^2 \qquad (2)$$

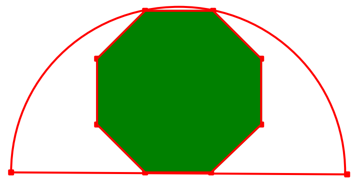
Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$r^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} R + r\right)^2 = (R - r)^2 .$$

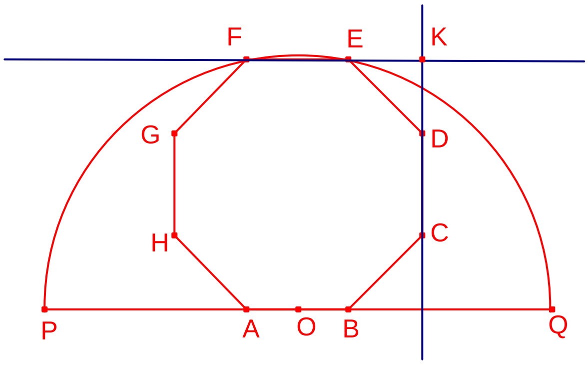
Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r = \frac{-5 - \sqrt{5} + \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{5} R .$$

632.- Un semicercle de radi R té inscrit un octògon regular (veure figura).
Determineu la mesura del costat de l'octògon.



Solució:



Siga el semicercle de entre O i diàmetre $\overline{PQ} = 2R$.
Siga ABCDEFGH l'octògon regular de costat $\overline{AB} = c$.
Notem que O el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBM}$:

$$\overline{KM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c .$$

Les rectes EF, CD es tallen en el punt K.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{DEK}$:

$$\overline{DK} = \frac{\sqrt{2}}{2}c .$$

$$\overline{BE} = 2 \cdot \overline{DK} + \overline{CD} = \left(1+\sqrt{2}\right)c .$$

$$\overline{OD} = R\ ,\ \overline{OB} = \frac{1}{2}c .$$

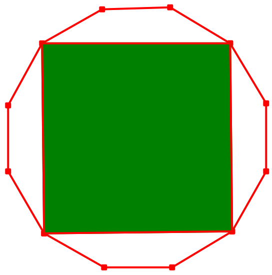
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBD}$:

$$R^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 c^2 .$$

Resolent l'equació:

$$c = \frac{2}{\sqrt{13+8\sqrt{2}}}R .$$

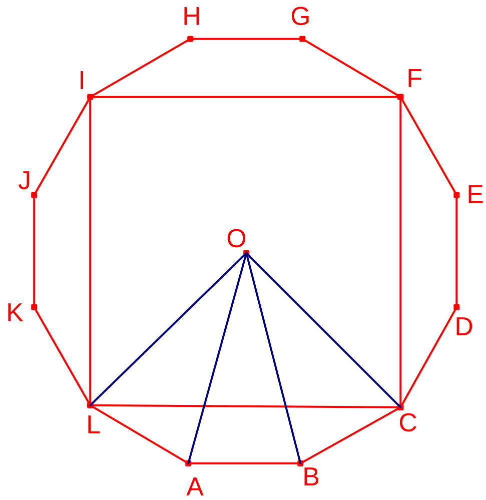
633.- Un dodecàgon regular té inscrit un quadrat (veure figura). Determineu la proporció entre les àrees d'ambdós polígons.



Solució 1:

Siga el dodecàgon ABCDEFGHIJKL de centre O i radi de la circumferència circumscrita $\overline{OA} = r$.

Siga CFIL el quadrat inscrit en el dodecàgon.



$\angle AOB = \frac{360^o}{12} = 30^o$, $\angle LOC = \frac{360^o}{4} = 90^o$.

L'àrea del dodecàgon és 12 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

$$S_{12} = 12\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\sin 30^o}{2} = 3r^2.$$

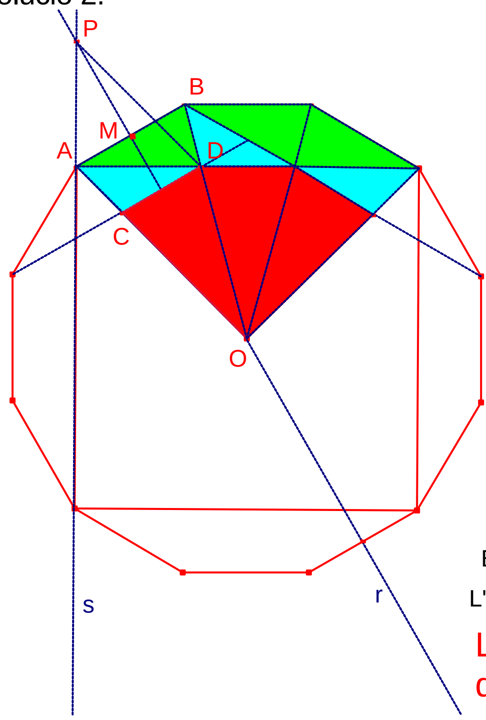
L'àrea del quadrat és 4 vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{LOC}$:

$$S_4 = 4\frac{r^2}{2} = 2r^2.$$

La proporció entre les àrees d'ambdues figures és:

$$\frac{S_4}{S_{12}} = \frac{2r^2}{3r^2} = \frac{2}{3}.$$

Solució 2:



Els triangles blaus són iguals

Siga M el punt mig del costat AB

Tracem mediatriu r al costat AB

Dibuixem la recta s

Siga P la intersecció de les rectes r, s

Angle AOM=15º

Angle OAP=135º

Angle APM=30º

AP=AB

PD=AB·sqrt(2)

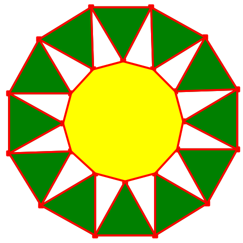
Angle MPD=15º

OC=PD

Els triangles ABD, OCD són semblant i La raó és 1:sqrt(2)

L'àrea del triangle roig és el doble de l'àrea del triangle verd

L'àrea del dodecàgon és 1'5 l'àrea del quadrat



634.- Sobre els costats d'un dodecàgon regular, i cap a l'interior del dodecàgon, s'han dibuixat dotze triangles equilàters.
Pels vèrtexs dels dotze triangles, interiors al dodecàgon, s'ha dibuixat un altre dodecàgon regular.
Determineu proporció entre les àrees dels dos dodecàgons.

Solució:

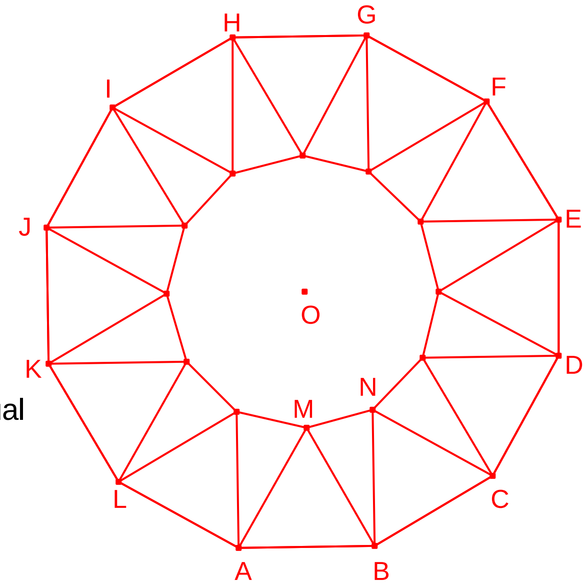
Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.

Siga $\overline{MN} = x$ el costat del dodecàgon interior.

$\overline{BM} = \overline{BN} = c$.

$\angle ABC = 150^\circ$, $\angle ABM = \angle CBN = 60^\circ$.

Aleshores, $\angle MBN = 30^\circ$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BMN}$:

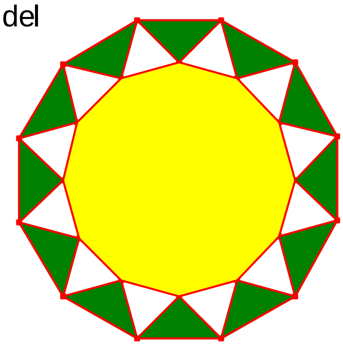
$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ}.$$

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

La proporció de les àrees de dos dodecàgons és igual al quadrat de la proporció entre els costats:

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2-\sqrt{3}.$$

635.- Sobre els costats d'un dodecàgon regular, i cap a l'interior del dodecàgon, s'han dibuixat dotze triangles rectangles (veure figura).
Pels vèrtexs dels dotze triangles, interiors al dodecàgon, s'ha dibuixat un altre dodecàgon regular.
Determineu proporció entre les àrees dels dos dodecàgons.



Solució 1:

Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.

Siga $\overline{MN} = x$ el costat del dodecàgon interior.

$\overline{BM} = \overline{BN} = c$.

$\angle ABC = 150^o$, $\angle ABM = \angle CBN = 45^o$.

Aleshores, $\angle MBN = 60^o$.

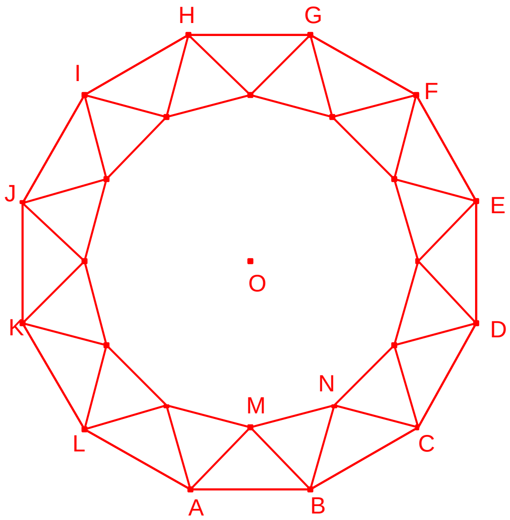
El triangle $\overset{\Delta}{BMN}$ és equilàter.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

$$x = \overline{MN} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

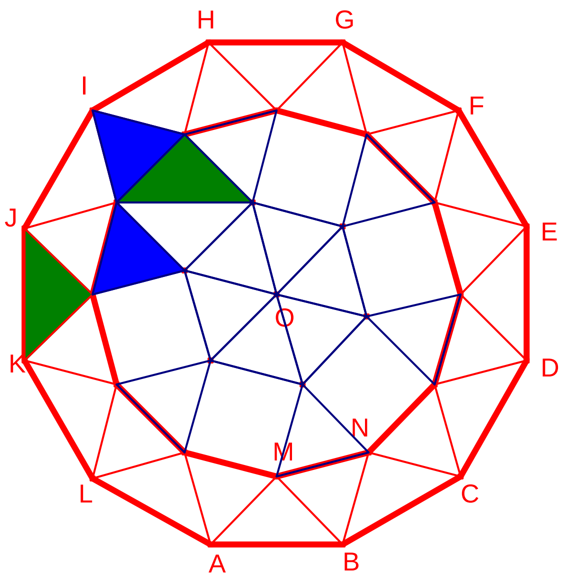
$$\frac{x}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



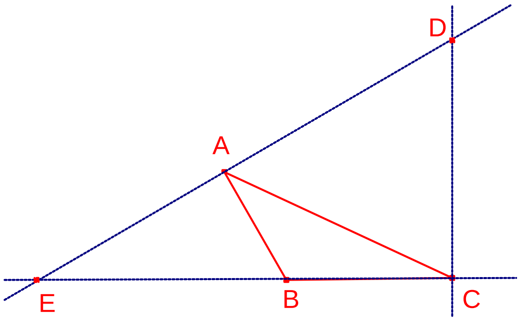
La proporció de les àrees de dos dodecàgons és igual al quadrat de la proporció entre els costats:

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Solució 2:

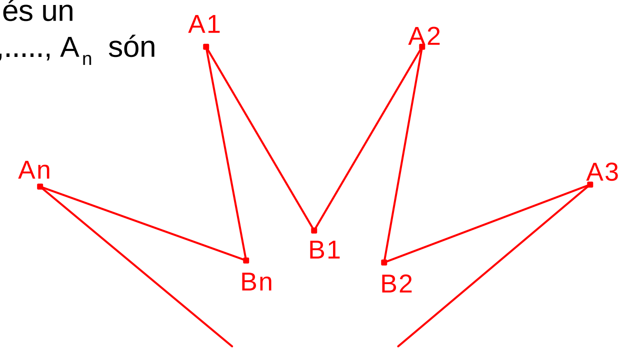


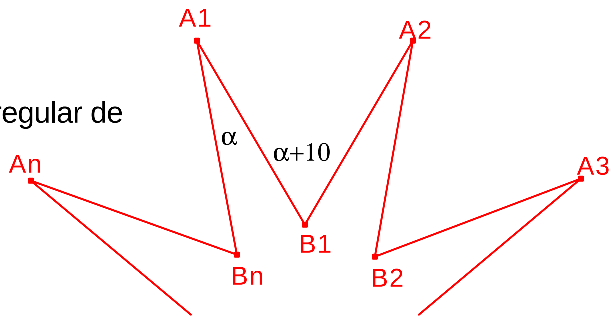
636.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 120^{o}$, $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$.
Les perpendiculars a $\overline{AB}$ per A i a $\overline{BC}$ per C es tallen en el punt D.
Calculeu la mesura del segment $\overline{CD}$.



Solució:
$\angle BAD = 90^{o}$, $\angle BCD = 90^{o}$, aleshores:
$\angle ADC = 60^{o}$.
Les rectes AD, BC és tallen en el punt E.
$\angle BCD = 90^{o}$, aleshores:
$\angle CED = 30^{o}$.
$\overset{\Delta}{BAE}$ és un triangle rectangle tal que $\angle BEA = 30^{o}$,
$\overline{AB} = 3$.
Aleshores, $\overline{EB} = 2 \cdot \overline{AB} = 6$.
$\overline{EC} = \overline{EB} + \overline{BC} = 6 + 4 = 10$.
$\overset{\Delta}{CDE}$ és un triangle rectangle tal que $\angle CED = 30^{o}$, $\overline{EC} = 10$.
Aleshores, $\overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{EC} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

637.- El dibuix mostra una part d'un n-estel regular, és un polígon de 2n costats iguals i els angles $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ són iguals i els angles $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots, B_n$ són iguals.
Si l'angle agut A_1 és 10º menys que l'angle agut B_1, determineu el valor de n.





Solució:
Els vèrtexs $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ formen un polígon regular de n costats, aleshores, l'angle interior del polígon mesura:

$\angle A_1A_2A_3 = 180º - \dfrac{360º}{n}$.

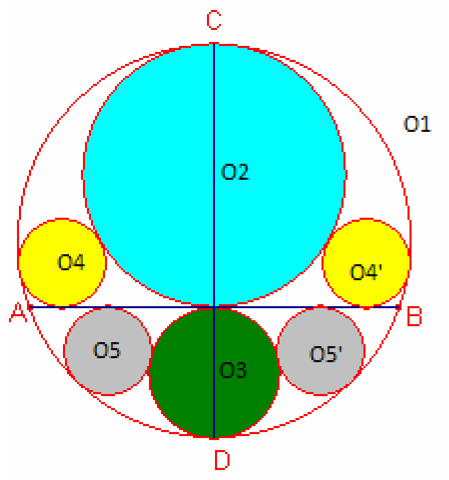
Siga $\angle B_nA_1B_1 = \alpha$, $\angle A_1B_1A_2 = \alpha + 10º$.

$\angle A_1A_2A_3 = 2\angle B_1A_2A_1 + \angle B_1A_2B_2 = 2\dfrac{180º - (\alpha + 10)}{2} + \alpha = 170º$.

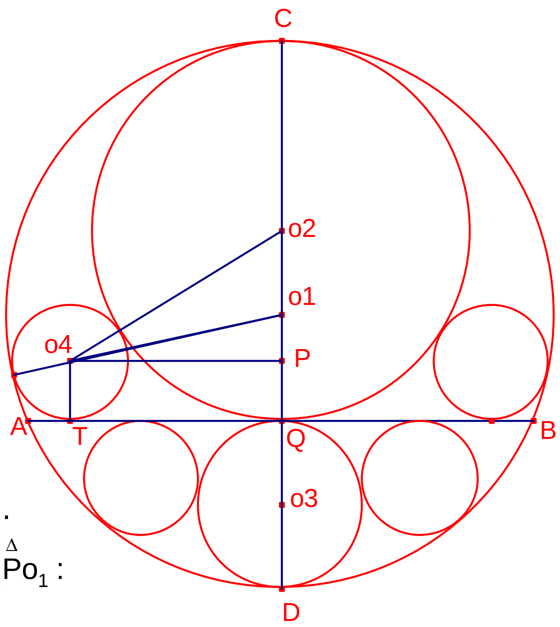
$180º - \dfrac{360º}{n} = 170º$. Resolent l'equació:

$n = 36$.

638.- En la circumferència O_1 el diàmetre $\overline{CD}$ i la corda $\overline{AB}$ són perpendiculars.
Les circumferències O_2, O_3 són tangents exteriors i cadascuna tangent interior a la circumferència O_1.
Les circumferències O_4, O_4' són tangents interiors a la circumferència O_1 i al segment $\overline{AB}$.
Les circumferències O_5, O_5' són tangents interiors a la circumferència O_1 i al segment $\overline{AB}$.
Proveu que les circumferències O_4, O_4', O_4, O_5, O_5' tenen el mateix radi.



Solució:
Siguen les circumferències O_i de centre o_i i radi r_i.
$r_1 = r_2 + r_3$.
Siga T el punt de tangència de la circumferència O_1 i el segment $\overline{AB}$.
Siga Q el punt de tangència de les circumferències O_2, O_3.
Siga P la projecció de o_4 sobre el segment $\overline{CD}$.



$\overline{o_2o_4} = r_2 + r_4$, $\overline{o_2P} = r_2 - r_4$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{o_4Po_2}$:

$$\overline{o_4P} = (r_2 + r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2 \qquad (1)$$

$\overline{o_1o_4} = r_1 - r_4 = r_2 + r_3 - r_4$, $\overline{o_1P} = r_1 - r_4 - 2r_3 = r_2 - r_3 - r_4$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{o_4Po_1}$:

$$\overline{o_4P} = (r_2 + r_3 - r_4)^2 - (r_2 - r_3 - r_4)^2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

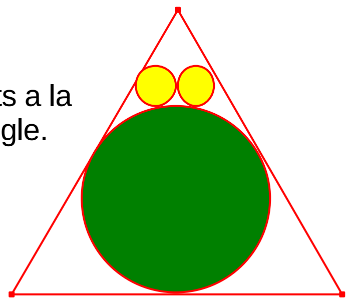
$$(r_2 + r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2 = (r_2 + r_3 - r_4)^2 - (r_2 - r_3 - r_4)^2.$$

$r_2 \cdot r_4 = (r_2 - r_4)r_3$. Resolent l'equació en la incògnita r_4:

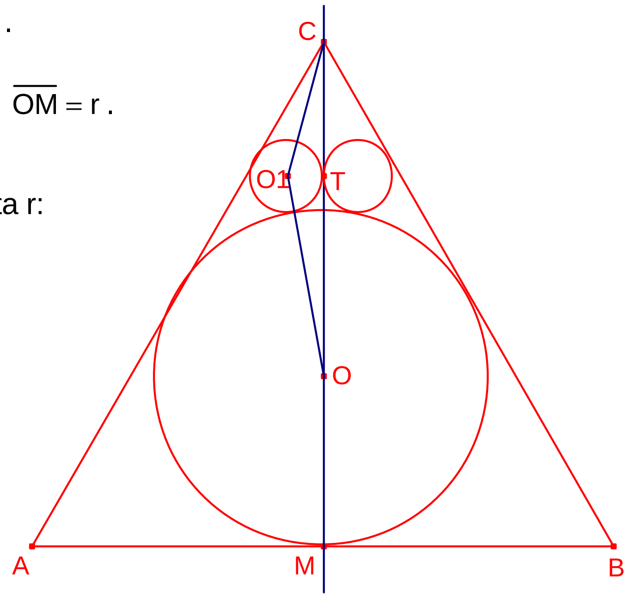
$$r_4 = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3}.$$

Anàlogament, $r_5 = \dfrac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3}$.

639.- En un triangle equilàter de costat c està inscrita una circumferència.
Dues circumferències d'igual radi són tangents entre si, tangents a la circumferència inscrita i cadascuna tangent a un costat del triangle.
Determineu els radis de les tres circumferències



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga la circumferència inscrita de centre O i radi $\overline{OM} = r$.
$\overline{OA} = \overline{OC} = 2r$.
$\overline{AM} = \frac{c}{2} = r\sqrt{3}$. Resolent l'equació en la incògnita r:
$r = \frac{\sqrt{3}}{6}c$.
Siga T el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga O_1 el centre d'una de les circumferències menudes i $r_1 = \overline{O_1T}$ el seu radi.
Siga $x = \overline{CT}$. $\angle TCO_1 = 15^o$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{TCO_1}$.

$$\frac{r_1}{x} = tg15^o = tg(45^o - 30^o) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

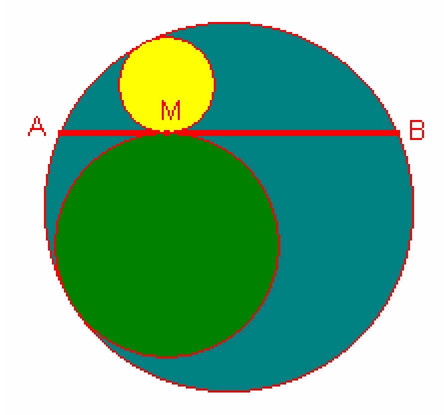
$x = \left(2+\sqrt{3}\right)r_1$.
$\overline{OT} = \overline{OC} - \overline{CT} = 2r - x = 2r - \left(2+\sqrt{3}\right)r_1$. $\overline{OO_1} = 2r + r_1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{TOO_1}$.
$(r + r_1)^2 = r_1^{\ 2} + \left(2r - \left(2+\sqrt{3}\right)r_1\right)^2$.
$\left(7 + 4\sqrt{3}\right)r_1^{\ 2} - \left(10 + 4\sqrt{3}\right)r \cdot r_1 + 3r^2 = 0$.
Resolent l'equació:

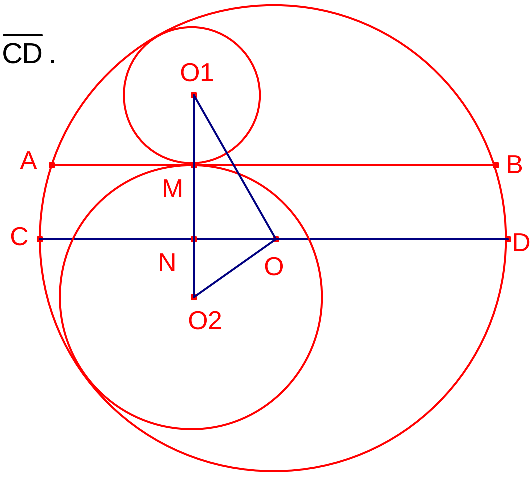
$$r_1 = \frac{5 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{7 + 4\sqrt{3}}r = \frac{5 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{7 + 4\sqrt{3}}r = \frac{3}{7 + 4\sqrt{3}}r = 3\left(7 - 4\sqrt{3}\right)r.$$

$$r_1 = 3\left(7 - 4\sqrt{3}\right)r = 3\left(7 - 4\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{6}c = \frac{7\sqrt{3} - 12}{2}c.$$

640.- Siga $\overline{AB}$ una corda de la circumferència (veure la figura).
Dues circumferències són tangent interiors a la circumferència i tangents exterior en el punt M de la corda.
Demostreu que la raó entre els radis de les dues circumferències menudes és independent del punt M de la corda.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{CD} = 2r$ (el diàmetre $\overline{CD}$ paral·lel a la corda $\overline{AB}$).
Siga $\overline{MN} = a$ distància fixa de la corda $\overline{AB}$ al diàmetre $\overline{CD}$.
Siga la circumferència de centre O_1 i radi $\overline{O_1M} = r_1$.
Siga la circumferència de centre O_2 i radi $\overline{O_2M} = r_2$.
$\overline{O_1O} = r - r_1$, $\overline{O_1N} = a + r_1$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{O_1NO}$:

$$(r - r_1)^2 - (a + r_1)^2 = \overline{ON}^2 \qquad (1)$$

$\overline{O_2O} = r - r_2$, $\overline{O_2N} = r_2 - a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{O_2NO}$:

$$(r - r_2)^2 - (r_2 - a)^2 = \overline{ON}^2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$$(r - r_1)^2 - (a + r_1)^2 = (r - r_2)^2 - (r_2 - a)^2 .$$

Simplificant:

$$-r \cdot r_1 - a \cdot r_1 = -r \cdot r_2 + a \cdot r_2 .$$

$$(-r - a) \cdot r_1 = (a - r) \cdot r_2 .$$

$\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{r - a}{r + a}$, la proporció dels radis no depén del punt M.