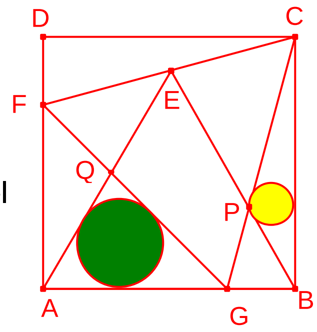
Problemes de Geometria per a l'ESO 65

641.- En un quadrat ABCD s'han inscrit dos triangle equilàters $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{CFG}$.

Els dos triangles s'intersecten en els punts P, Q (veure figura)

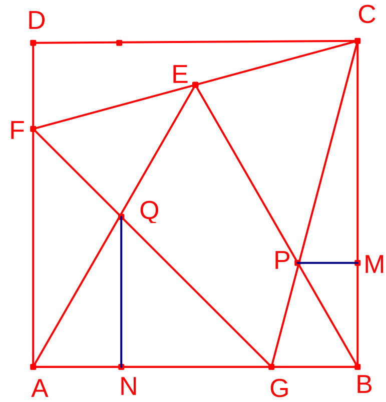
Siga R el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AGQ}$ i r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCP}$.

Proveu que $\frac{R}{r}=2$.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=1$.



Siga $h=\overline{PM}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{BCP}$.

Siga $x=\overline{CM}$.

$\angle PBC=30^o$, $\angle PCB=15^o$.

$\overline{PB}=2h$, $\overline{BM}=h\sqrt{3}$.

$\frac{y}{h}=tg75^o$. $y=\left(2+\sqrt{3}\right)h$.

$\frac{h}{\overline{PC}}=\cos 75^o$. $\overline{PC}=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)h$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCP}$ és: $\frac{\overline{BM}+\overline{CM}+\overline{PB}+\overline{PC}}{2}=\frac{\overline{BC}\cdot h}{2}$.

$h=\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)hr$

$r=\frac{1}{4+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{-2-4\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{8}$.

Aplicant raons trionomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GBC}$:

$\overline{GB}=tg15^o=2-\sqrt{3}$. $\overline{AG}=1-\overline{GB}=\sqrt{3}-1$.

Siga $k=\overline{QN}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{AGQ}$.

Siga $y=\overline{AN}$.

$\angle QAG=60^o$, $\angle AGQ=45^o$.

$\overline{NG}=k$, $\overline{GQ}=k\sqrt{2}$.

$y=\overline{AN}=\frac{\sqrt{3}}{3}k$. $\overline{AQ}=2y=\frac{2\sqrt{3}}{3}k$.

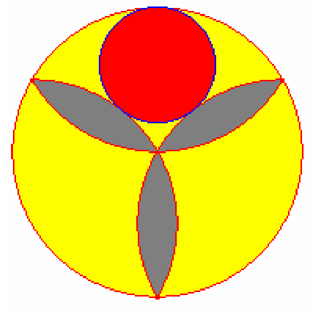
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AGQ}$ és: $\frac{\overline{AN}+\overline{NG}+\overline{AQ}+\overline{GQ}}{2}=\frac{\overline{AG}\cdot k}{2}$.

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}\right)kR=\left(\sqrt{3}-1\right)k$

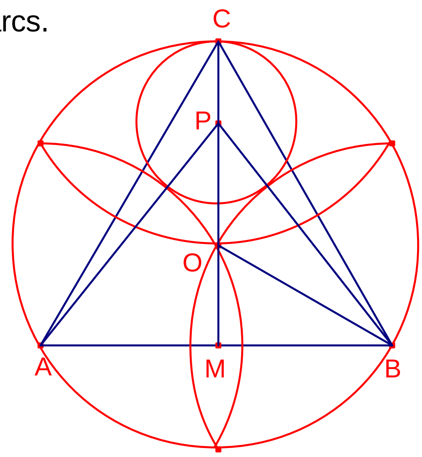
$R=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{-2-4\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4}$.

Aleshores, $\frac{R}{r}=2$.

642.- En una circumferència de radi R s'han dibuixat 3 arcs iguals que passen pel centre.
S'ha dibuixat una circumferència tangent interior a l'anterior i tangent exterior a dos arcs.
Determineu el radi de la circumferència menuda.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi R.
Els extrems dels arcs formen un triangle equilàter.
Els centres dels tres arc estan en la circumferència de radi R i formen un triangle equilàter.



Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter que formen els centres dels arcs.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
O és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{OB}=R$, $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OB}=\frac{R}{2}$, $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

$\overline{CM}=3\overline{OM}=\frac{3}{2}R$.

Siga P el centre de la circumferència menuda i $\overline{PC}=r$ el seu radi.

$\overline{BP}=R+r$, $\overline{PM}=\overline{CM}-r=\frac{3}{2}R-r$.

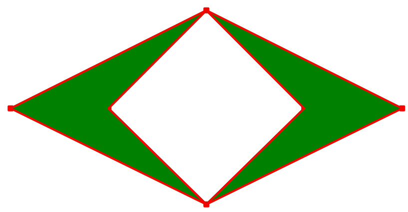
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBP}$:

$$(R+r)^2=\left(\frac{3}{2}R-r\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2.$$

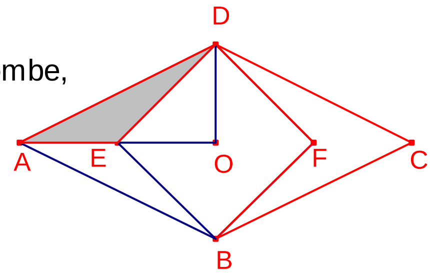
Resolent l'equació:

$$r=\frac{2}{5}R.$$

643.- En un rombe s’ha inscrit un quadrat.
Si l’àrea de la zona ombrejada és la meitat del rombe, determineu la mesura dels angles del rombe.



Solució:
Siga el rombe ABCD de centre O.
Siga $2\alpha = \angle DAB$ angle agut del rombe.
Siga BFDE el quadrat interior al rombe.
Si l’àrea de la zona ombrejada és la meitat de l’àrea del rombe, l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{AED}$ és igual a l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{EOD}$.



Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les base, aleshores:
$\overline{AE} = \overline{EO}$, $\overline{OD} = \overline{EO}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$:

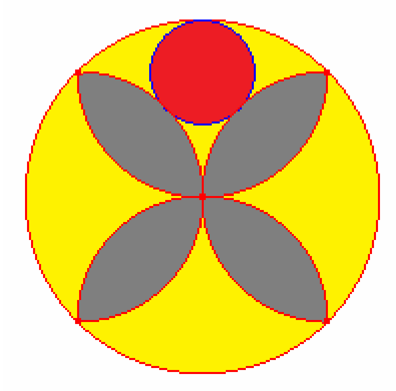
$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{AO}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

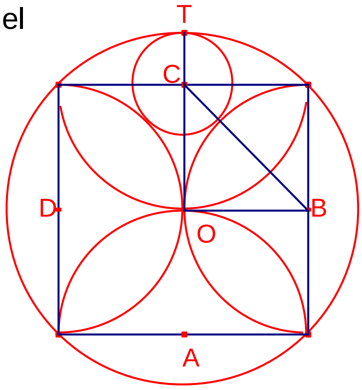
$$2\alpha = \text{arctg}\frac{4}{3} \approx 53º7'48''.$$

$$\angle ABC = 180º - 2\alpha \approx 126º52'12''.$$

644.- En una circumferència de radi R s'han dibuixat 4 arcs iguals que passen pel centre.
S'ha dibuixat una circumferència tangent interior a l'anterior i tangent exterior a dos arcs (veure la figura).
Determineu el radi de la circumferència menuda.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi R.
Els extrems dels arcs formen un quadrat.
Els centres dels quatre arc estan en els punts migs dels costats del quadrat que formen els extrems dels arcs.
Siga ABCD el quadrat que formen els centres dels arcs.



$\overline{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Siga C el centre de la circumferència menuda i $\overline{CT} = r$ el seu radi.

$\overline{BC} = \overline{OB} + r = \frac{\sqrt{2}}{2}R + r$.

$\overline{BC} = \overline{OB}\sqrt{2} = R$.

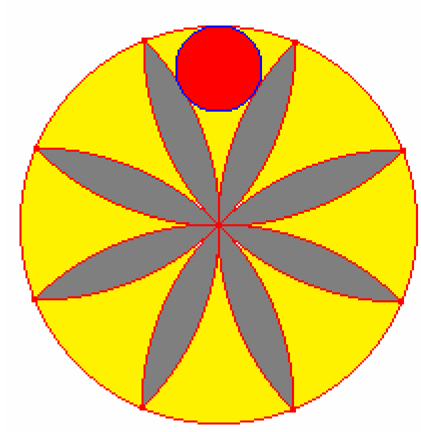
Aleshores,

$\frac{\sqrt{2}}{2}R + r = R$.

Resolent l'equació:

$r = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R$.

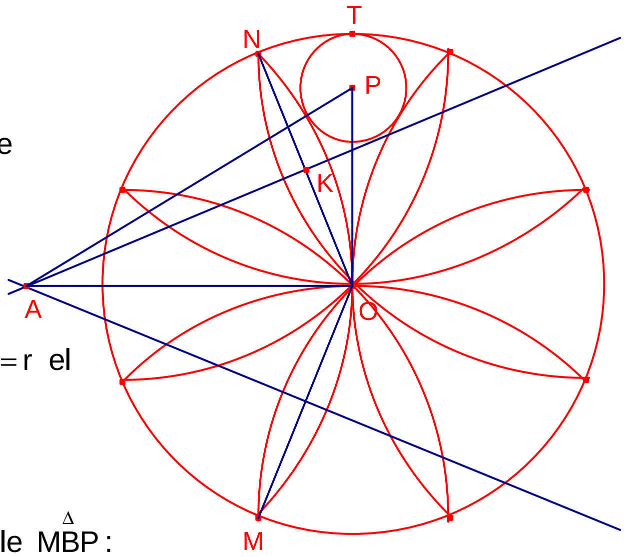
645.- En una circumferència de radi R s'han dibuixat 8 arcs iguals que passen pel centre.
S'ha dibuixat una circumferència tangent interior a l'anterior i tangent exterior a dos arcs (veure la figura).
Determineu el radi de la circumferència menuda.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi R.
Els extrems dels arcs formen un octògon regular.

Considerem l'arc $\overset{\frown}{MON}$, $\angle MON = 135^{o}$.
El centre de l'arc està en la intersecció de les mediatrius als segments $\overline{OM}$, $\overline{ON}$.
Siga A el centre de l'arc.
Siga K el punt mig del segment $\overline{ON}$.
Notem que $\angle MON = 45^{o}$.
$\overline{KO} = \frac{1}{2}R$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKO}$:

$$\overline{AO} = \frac{1}{2\sin\frac{45^{o}}{2}}R = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}R.$$



Siga P el centre de la circumferència menuda i $\overline{PT} = r$ el seu radi.

$\overline{OP} = R - r$, $\overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}R + r$.

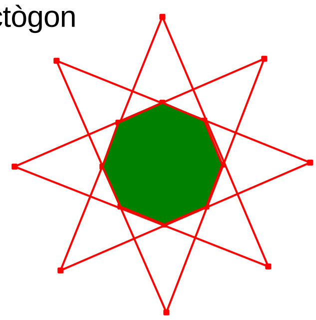
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBP}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}R + r\right)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}R\right)^2.$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{2\left(1+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}R.$$

646.- Els costats d'un polígon estrellat de 8 costats, formen un octògon regular.
Si el costat de l'octògon estrellat és c. Calculeu el costat de l'octògon menut.



Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'octògon estrellat de centre O.

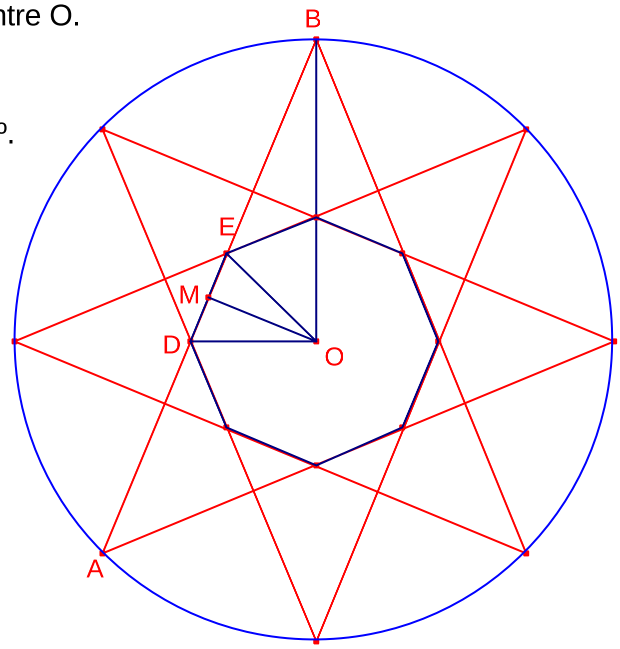
Siga $\overline{DE} = d$ costat de l'octògon menut.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

L'angle interior de l'octògon estrellat mesura 45º.

L'angle central de l'octògon mesura 45º.

Siga $\overline{OM} = x$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BMO}$, $\overset{\Delta}{OME}$ són semblants ja que $\angle MBO = \angle MOE = \frac{45^o}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques:

$$\frac{\frac{d}{2}}{x} = \frac{x}{\frac{c}{2}} = \operatorname{tg}\frac{45^o}{2}.$$

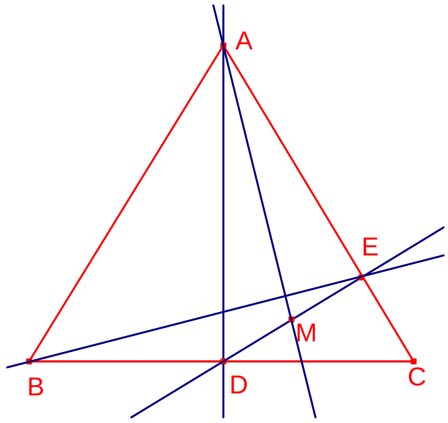
$$d = \frac{4x^2}{c} = \operatorname{tg}^2\frac{45^o}{2} \cdot c = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)c.$$

467.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb els angles aguts B i C.
Siga D el peu de l'altura des del vèrtex A.
Siga E el punt del costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{DE} \perp \overline{AC}$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{DE}$.
Demostreu que si $\overline{AM} \perp \overline{BE}$ el triangle és isòsceles.
Crux Mathematicorum M509.

Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{ADM}$, $\overset{\Delta}{BEC}$ són semblants ja que els costats corresponents són perpendiculars.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{a} \qquad (1)$$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCE}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{2 \cdot \overline{DM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \qquad (2)$$

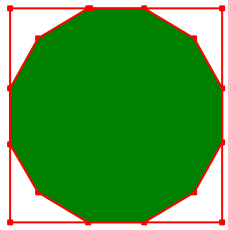
De les expressions (1) (2):

$a = 2 \cdot \overline{CD}$.

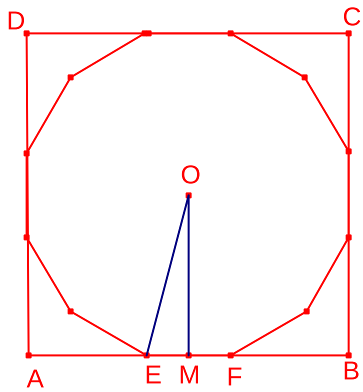
Aleshores, $\overline{BD} = \overline{CD}$, per tant, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{ADB}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{AB} = \overline{AC}$, per tant, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.

648.- En un quadrat hi ha inscrit un dodecàgon regular (veure figura).
Determineu la raó entre els perímetres dels dos polígons.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$ de centre O.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga $\overline{EF} = d$ el costat del dodecàedre regular que té els vèrtexs en el costat $\overline{AB}$.
L'angle central del dodecàedre mesura $\angle EOF = \dfrac{360^o}{12} = 30^o$.



$\angle EOM = 15^o$.

$\overline{OM} = \dfrac{c}{2}$, $\overline{EM} = \dfrac{d}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EOM}$:

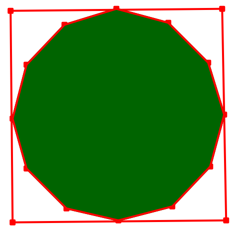
$$\frac{\frac{d}{2}}{\frac{c}{2}} = tg15^o = tg(45^o - 30^o) = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

$$\frac{d}{c} = 2-\sqrt{3}.$$

La raó entre els perímetres de les dues figures és:

$$\frac{12d}{4c} = 3\frac{d}{c} = 3\left(2-\sqrt{3}\right).$$

649.- En un quadrat hi ha inscrit un dodecàgon regular (veure figura).
Determineu la raó entre els perímetres dels dos polígons.

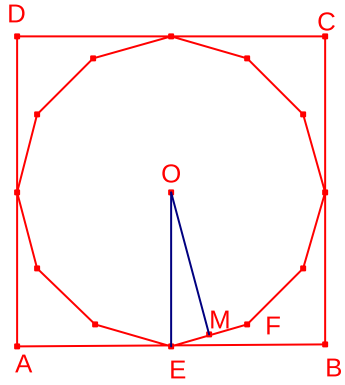


Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=c$ de centre O.

Siga $\overline{EF}=d$ el costat del dodecàedre regular que té el vèrtex E en el costat $\overline{AB}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{EF}$.



L'angle central del dodecàedre mesura $\angle EOF=\frac{360^o}{12}=30^o$.

$\angle EOM=15^o$.

$\overline{OE}=\frac{c}{2}$, $\overline{EM}=\frac{d}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EOM}$:

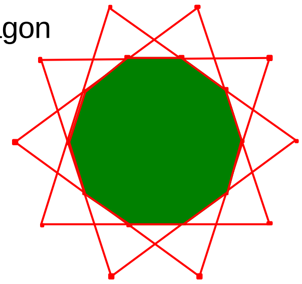
$$\frac{\frac{d}{2}}{\frac{c}{2}}=\sin 15^o=\sin(45^o-30^o)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\frac{d}{c}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

La raó entre els perímetres de les dues figures és:

$$\frac{12d}{4c}=3\frac{d}{c}=\frac{3}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

650.- En l'interior d'un decàgon regular estrellat hi ha inscrit un decàgon regular convex.
Determineu la proporció entre els costats dels dos polígons.



Solució:

Siga $\overline{AB}$ el costat del decàgon estrellat regular de centre O.

Siga $\overline{CD}$ el costat del decàgon regular convex.

$\angle COD = 36^{o}$, $\angle BAF = 36^{o}$, aleshores:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \Phi$, $\overline{BF} = \overline{OB} = \overline{OA}$, aleshores:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \Phi \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{CD}} = \Phi \qquad (2)$$

Multiplicant ambdues expressions:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}}\Phi^{2} \qquad (3)$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \Phi \qquad (4)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (3):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \Phi^{3} = 1 + 2\Phi = 2 + \sqrt{5}\,.$$