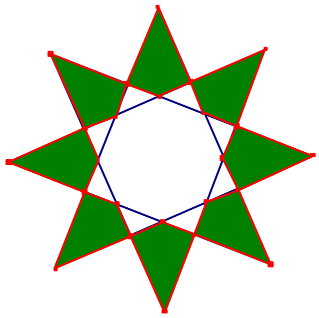
Problemes de Geometria per a l'ESO 66

651.- Siga un octògon estrellat regular de costat c.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.

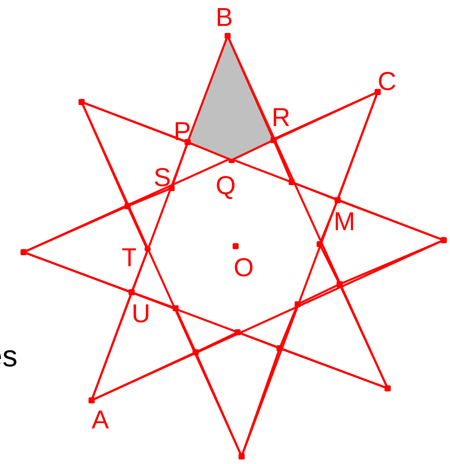


Solució:

Siga l'octògon estrellat regular de costat $\overline{AB} = c$.

Siga $\overline{BP} = d$, $\overline{PQ} = e$.

Notem que $\angle BPQ = 90^{o}$, $\angle BRC = 90^{o}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BRC}$:

$\overline{BC} = \overline{PM} = \overline{PU} = d\sqrt{2}$.

$c = 2d + d\sqrt{2}$.

$d = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQS}$:

$\overline{SQ} = \overline{ST} = e\sqrt{2}$.

$\overline{PU} = 2\overline{PS} + \overline{ST}$.

$d\sqrt{2} = 2e + e\sqrt{2}$.

Resolent l'equació:

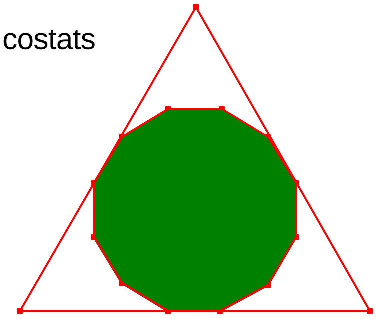
$e = \left(\sqrt{2}-1\right)d$.

$e = \left(\sqrt{2}-1\right)\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}c = \dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}c$

L'àrea de la zona ombrejada és igual a 16 vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQB}$:

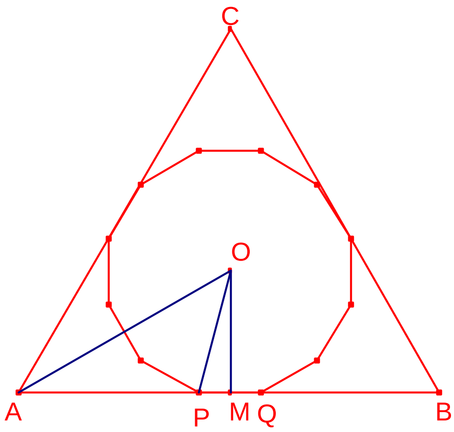
$S = 16\left(\dfrac{de}{2}\right) = 8\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}c\right)\left(\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}c\right) = 4\left(5\sqrt{2}-7\right)c^{2}$.

652.- Un triangle equilàter té inscrit un dodecàgon regular, que té 3 costats sobre el triangle equilàter (veure figura). Determineu:
a) la proporció entre els perímetres dels dos polígons.
b) la proporció entre les àrees dels dos polígons.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
Siga el dodecàgon de costat $\overline{PQ} = d$, P, Q sobre el costat $\overline{AB}$.
L'angle central $\angle POQ = 30^o$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$$\overline{OM} = \frac{c}{2}\text{tg}30^o = \frac{c\sqrt{3}}{6}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMO}$:

$$\overline{OM} = \frac{d}{2}\text{tg}75^o = \frac{d}{2}\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}d.$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{\frac{c\sqrt{3}}{6}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}d} = 1.$$

$$\frac{d}{c} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

La proporció entre els perímetres dels dos polígons és:

$$\frac{12d}{3c} = 4\frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = 3\cdot S_{ABO} = 3\frac{c\cdot\overline{OM}}{2}.$$

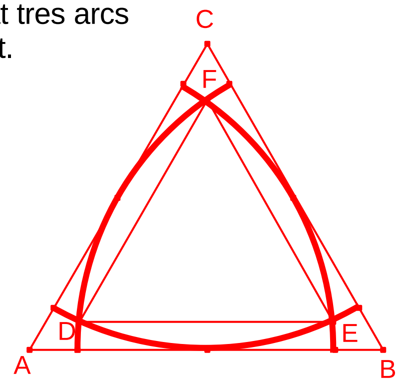
L'àrea del dodecàgon regular de costat d és:

$$S_{12} = 12\cdot S_{PQO} = 12\frac{d\cdot\overline{OM}}{2}.$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{12}}{S_{ABC}} = \frac{6d\cdot\overline{OM}}{\frac{3}{2}c\cdot\overline{OM}} = 4\frac{d}{c} = 4\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

653.- En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat c s'han dibuixat tres arcs de centres els vèrtexs del triangle i tangents al costat oposat.
La intersecció dels tres formen un triangle equilàter.
Determineu el costat del nou triangle equilàter format.



Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$ el radi dels arcs és:

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

Siga $\overset{\Delta}{DEF}$ el triangle format per la intersecció dels tres arcs.

$$\overline{BD} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c\,,\ \angle BAD = 30^o.$$

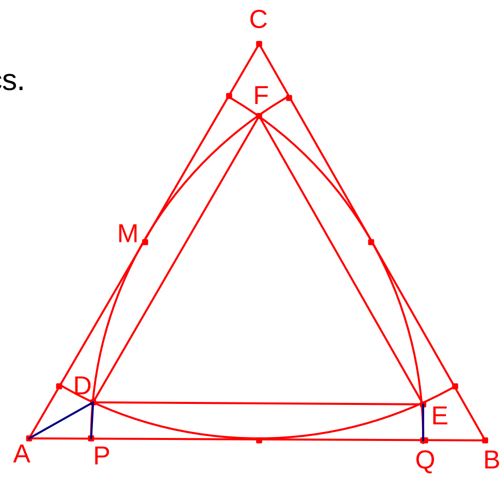
Aplicant el teorema de cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 = c^2 + \overline{AD}^2 - 2c\cdot\overline{AD}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Resolent l'equació:

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}c.$$

Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.



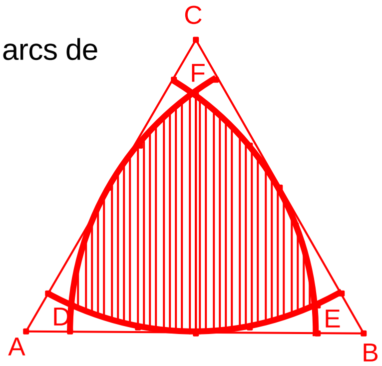
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:

$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AD} = \frac{3-\sqrt{6}}{4}c.$$

El costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ és:

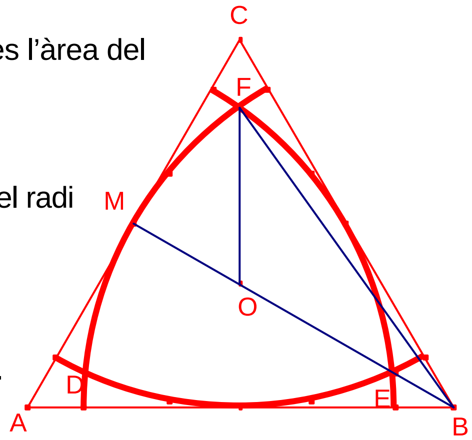
$$\overline{DE} = c - 2\overline{AP} = c - \frac{-1+\sqrt{6}}{2}c.$$

654.- En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat c s'han dibuixat tres arcs de centres els vèrtexs del triangle i tangents al costat oposat.
Determineu l'àrea determinada per la regió afitada pels tres arcs.



Solució:

Siga O el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Siguen D, E, F la intersecció dels tres arcs.
L'àrea que cerquem és igual a sis vegades l'àrea del triangle circular OMF, és a dir, sis vegades l'àrea del sector $\overset{\frown}{MF}$ de centre B menys sis vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OBF}$.
Siga $\alpha = \angle OBF$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$ el radi dels arcs és:

$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. $\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$. $\overline{OC} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

Siga $\overset{\Delta}{DEF}$ el triangle format per la intersecció dels tres arcs.

$\overline{BF} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, $\angle FCB = 30^o$.

Aplicant el teorema de cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BFC}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 = c^2 + \overline{CF}^2 - 2c \cdot \overline{CF} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Resolent l'equació: $\overline{CF} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}c$.

$$\overline{OF} = \overline{OC} - \overline{CF} = \frac{\sqrt{3}}{3}c - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}c = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}c.$$

$\angle FOB = 120^o$. Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{FOB}$:

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}c}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\sin 120^o}. \quad \sin\alpha = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}.$$

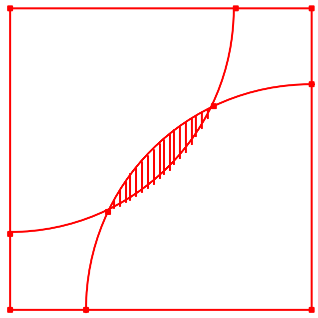
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}\right) \approx 24^o44'8''.$$

L'àrea que cerquem és:

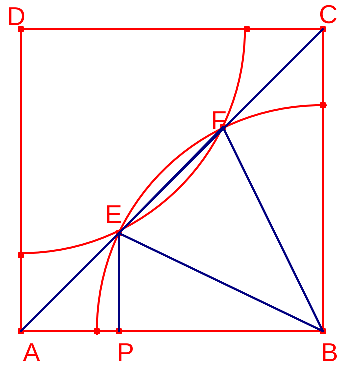
$$S = 6\left(\frac{\alpha}{360^o}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c\frac{\sqrt{3}}{3}c \cdot \sin\alpha}{2}\right) = 6\left(\frac{24^o44'8''}{360^o}\pi\frac{3}{4}c^2 - \frac{1}{4}\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}c^2\right).$$

$S \approx 0{,}34372c^2$.

655.- En un quadrat de costat 12 s'han dibuixat dos quadrants de radi 9. Calculeu l'àrea afitada pels dos arcs.
Olimpíada de Bolívia.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat 12.
Siguen E, F les interseccions dels dos quadrants.
E, F pertanyen a la diagonal $\overline{AC}$ del quadrat.
Siga P la projecció de E sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga $\overline{AP} = \overline{EP} = x$.
$\overline{PB} = 12 - x$. $\overline{BE} = 9$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EPB}$:
$9^2 = x^2 + (12 - x)^2$. Resolent l'equació:
$x = \dfrac{12 - 3\sqrt{2}}{2}$.
$\overline{AE} = x\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 3$.
$\overline{AC} = 12\sqrt{2}$.
$\overline{EF} = \overline{AC} - 2\overline{AE} = 6$.
Siga $\alpha = \angle EBF$.

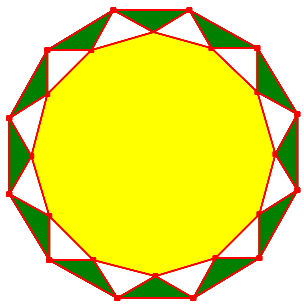
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EBF}$:
$2^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos\alpha$.
$\cos\alpha = \dfrac{7}{9}$, $\sin\alpha = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. $\alpha = \arccos\dfrac{7}{9} \approx 38^{o}56'33''$.

L'àrea que cerquem és igual a dues l'àrea del sector $\overset{\frown}{EF}$ de centre B menys dues vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BEF}$.

$$S = 2\left(\frac{\alpha}{360^{o}}\pi 9^2 - \frac{9 \cdot 9 \cdot \sin\alpha}{2}\right) = 2\left(\frac{38^{o}56'33''}{360^{o}}\pi 81 - \frac{81\frac{4\sqrt{2}}{9}}{2}\right).$$

$S \approx 4'14189$.

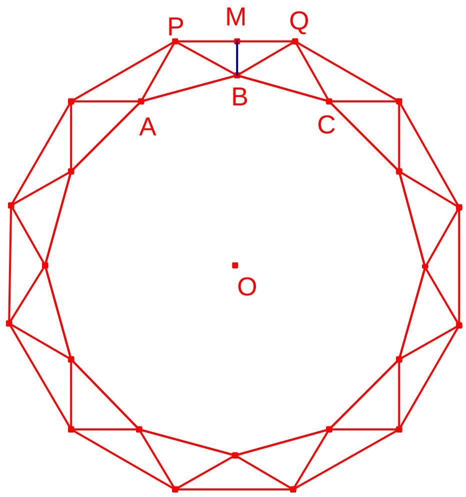
656.- Sobre els costats d'un dodecàgon regular i sobre l'exterior s'han dibuixat dotze triangles rectangles isòsceles (els costats del dodecàgon són les hipotenuses).
Els vèrtexs que formen l'angle recte formen un dodecàgon regular.
Determineu la proporció entre els dos dodecàgons.



Solució:

Siguen $\overline{AB} = \overline{BC} = c$ costats del dodecàgon interior.

Siga $\overline{PQ}$ costat del dodecàgon exterior.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\overline{PB} = \frac{\sqrt{2}}{2}c .$$

L'angle interior del dodecàgon regular és

$\angle ABC = 150^{\circ}$.

$\angle ABP = \angle QBC = 45^{\circ}$.

$\angle PBQ = 120^{\circ}$.

Aleshores, $\angle BPQ = 30^{\circ}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{PQ}$.

$$\overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{PB} = \frac{\sqrt{2}}{4}c .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

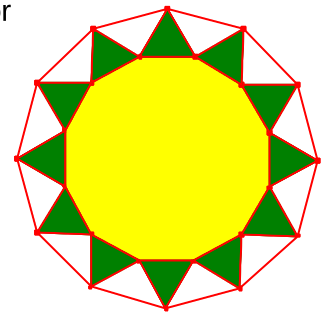
$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{6}}{4}c .$$

$$\overline{PQ} = 2\overline{PM} = \frac{\sqrt{6}}{2}c .$$

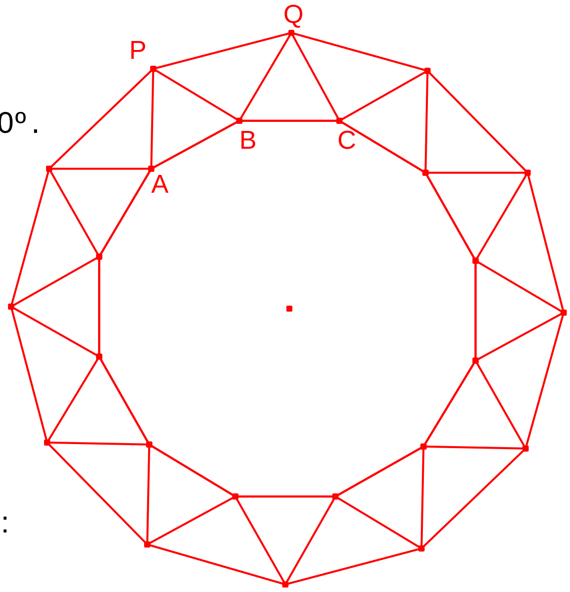
La proporció entre els dos dodecàgons és:

$$\frac{\overline{PQ}}{c} = \frac{\sqrt{6}}{2} .$$

657.- Sobre els costats d'un dodecàgon regular i sobre l'exterior s'han dibuixat dotze triangles equilàters.
Els vèrtexs exteriors formen un dodecàgon regular.
Determineu la proporció entre les àrees dels dos dodecàgons.



Solució 1:



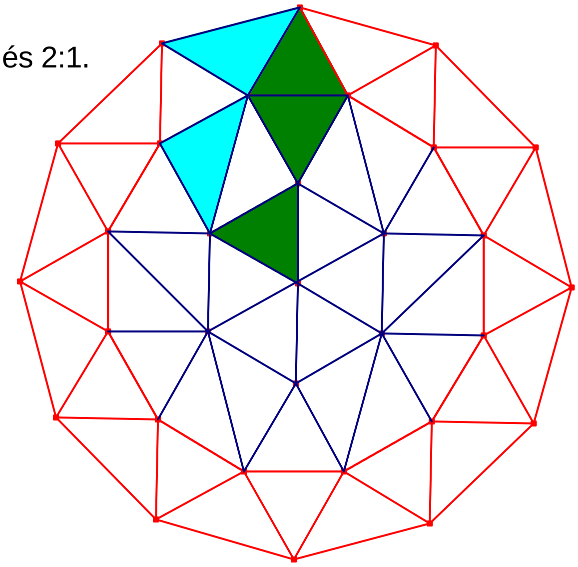
Siguen $\overline{AB} = \overline{BC} = c$ costats del dodecàgon interior.
Siga $\overline{PQ}$ costat del dodecàgon exterior.
L'angle interior del dodecàgon regular és $\angle ABC = 150^{o}$.
$\angle ABP = \angle QBC = 60^{o}$.
$\angle PBQ = 90^{o}$.
$\overline{BP} = \overline{BQ} = c$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:
$\overline{PQ} = c\sqrt{2}$.
La proporció entre els dos dodecàgons és:

$$\frac{\overline{PQ}}{c} = \sqrt{2}.$$

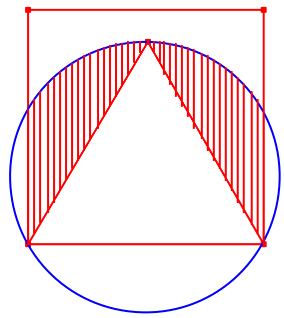
La proporció entre les àrees dels dos dodecàgons és:

$$\left(\frac{\overline{PQ}}{c}\right)^2 = 2$$

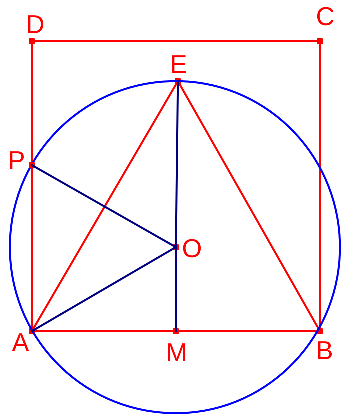
Solució 2:
La proporció entre les àrees dels dos dodecàgons és 2:1.



658.- En un quadrat de costat c s'ha inscrit un triangle equilàter. Considerem la circumferència circumscrita al triangle (veure figura). Determineu l'àrea de la superfície ratllada.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat c.



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$ de circumcentre O.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:

$\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

$\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$. $\overline{OE} = \frac{2}{3}\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

Siga P la intersecció de la circumferència circumscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$.

$\angle MAO = 30^o$. $\angle PAO = 60^o$.

$\overline{AO} = \overline{PO}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AOP}$ és equilàter.

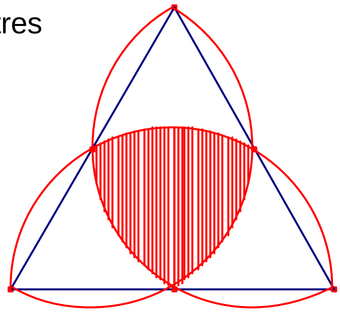
Els triangles $\overset{\Delta}{AOP}$, $\overset{\Delta}{AOE}$ tenen la mateixa àrea.

L'àrea ratllada és igual al doble de l'àrea del segment circular $\overset{\frown}{APE}$ menys el doble de l'àrea del segment circular $\overset{\frown}{AP}$ (tots dos segments tenen radi $\overline{OE} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$).

Com que l'àrea dels triangles $\overset{\Delta}{AOP}$, $\overset{\Delta}{AOE}$ és la mateixa:

$$S = 2\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^2 - S_{AOE}\right) - 2\left(\frac{1}{6}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^2 - S_{AOP}\right) = \frac{\pi}{9}c^2.$$

659.- Sobre els costats d'un triangle equilàter de costat c, com diàmetres s'han dibuixat tres semicircumferències.
Determineu l'àrea afitada pels tres arcs.

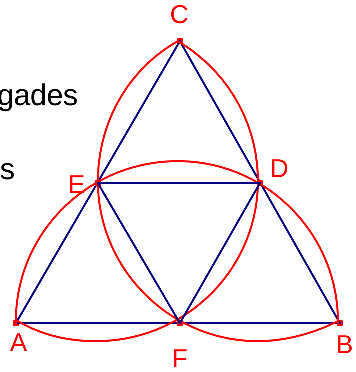


Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = c$

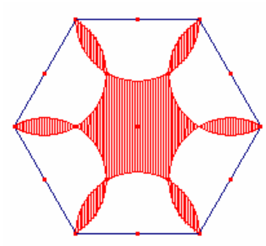
Les semicircumferències s'intersecten dos a dos en els punts migs del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siguen D, E, F els punts migs dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\angle DFE = 60^{o}$.
L'àrea limitada per les tres semicircumferències és igual a tres vegades l'àrea del segment circular $\overset{\frown}{DE}$ de 60º, centre F i radi $\overline{FD} = \frac{c}{2}$, més l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$.

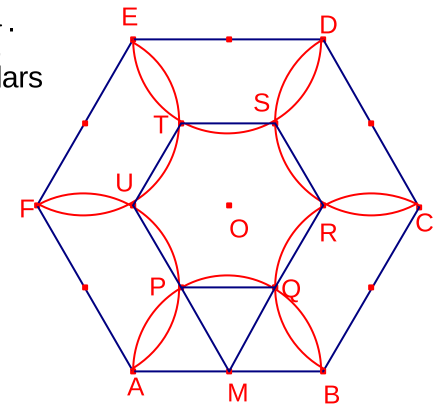


$$S = 3\left(\frac{1}{6}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi-\sqrt{3}}{8}c^2.$$

660.- Sobre els costats hexàgon regular de costat c, com diàmetres s'han dibuixat sis semicircumferències (veure figura).
Determineu l'àrea ratllada.



Solució:
Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat $\overline{AB} = c$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Les semicircumferències s'intersecten dos a dos ens els punts P, Q, R, S, T, U que formen un hexàgon regular, ja que $\angle PAM = 60^{o}$, $\overline{AM} = \overline{MP} = \frac{c}{2}$.
L'àrea de la zona ratllada és igual a l'àrea de 6 segments circulars $\overset{\frown}{PQ}$ de 60º, centre M i radi $\overline{MP} = \frac{c}{2}$, més l'àrea de l'hexàgon regular PQRSTU.



$$S = 6\left(\frac{1}{6}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right) + 6\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{4}c^2.$$