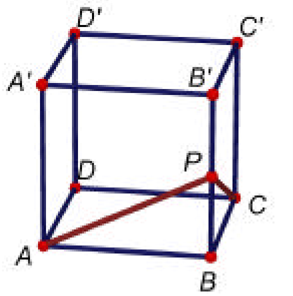
Problemes de Geometria per a l'ESO 67



661.- Siga el cub ABCDA'B'C'D'.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{BB'}$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle APC$.

Solució:
Siga $\angle APC = \alpha$.
Siga $\overline{AB} = c$ aresta del cub.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = c\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:
$\overline{AP} = c\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCP}$:
$\overline{CP} = c\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

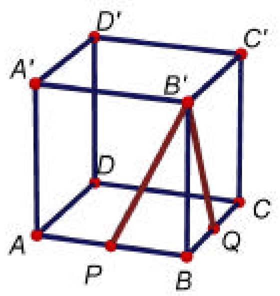
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACP}$:

$$\left(c\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}c\right)^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{2}c\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}c\cdot\cos\alpha .$$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$.

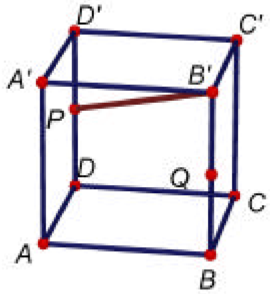
$\alpha = \arccos\dfrac{1}{5} \approx 78^{o}27'47''$.

Problema:
Siga el cub ABCDA'B'C'D'. Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle PB'Q$.



Solució:
$\alpha = \arccos\dfrac{4}{5} \approx 36^{o}52'12''$.

Problema
Siga el cub ABCDA'B'C'D'. Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{DD'}$.
Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{BB'}$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle PB'Q$.



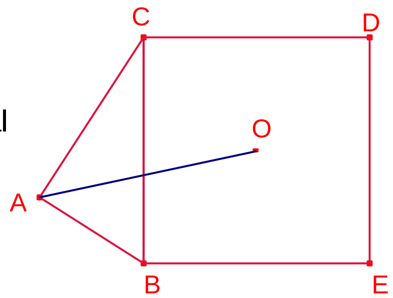
Solució:
$\alpha = \arccos\dfrac{1}{3} \approx 70^{o}31'44''$.

662.- Siga O el centre del quadrat BCDE construït sobre el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, recte en A.

a) Demostreu que $\overline{AO}$ és la bisectriu de l'angle $\angle BAC$.

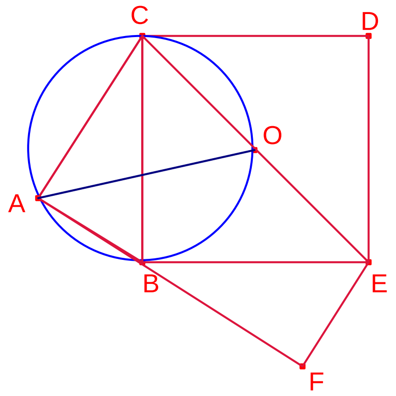
b) Siga el punt F de la prolongació del costat $\overline{AB}$, a partir de B, tal que $\overline{BF} = \overline{AC}$. Proveu que ACEF és un trapezi.

c) Determineu com ha de ser el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ a fi que el trapezi ACEF i el quadrat BCDE tinguen la mateixa àrea.



Solució:

a)



El quadrilàter ABOC és cíclic ja que té els angles oposats suplementaris,

$\angle BAC = \angle BOC = 90^o$.

Per altra banda, $\angle CBO = 45^o$.

Els angles, $\angle CBO, \angle CAO$ són inscrits en la circumferència circumscrita al quadrilàter ABOC i abracen el mateix arc.

$\angle CAO = \angle CBO = 45^o$.

Aleshores, $\overline{AO}$ és la bisectriu de l'angle recte $\angle BAC$.

b)

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FBE}$ són iguals ja que tenen dos costats iguals, $\overline{BF} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$ i el angle que formen igual $\angle ACB = \angle FBE$.

Aleshores, $\angle EFB = \angle BAC = 90^o$.

Aleshores, els costats $\overline{AC}$, $\overline{EF}$ són paral·lels.

Per tant, ACEF és un trapezi i a més a més, rectangle.

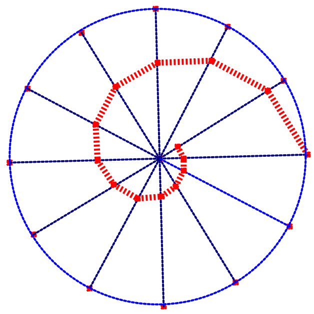
c)

De l'apartat b) les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FBE}$, són iguals.

L'àrea del quadrat BCDE i el trapezi ACEF són iguals si L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a la quarta part del quadrat BCDE és a dir, si els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{OBC}$ tenen la mateixa àrea.

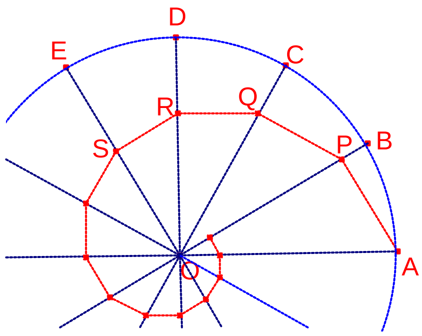
Com que el triangle $\overset{\Delta}{OBC}$ és rectangle i el de major àrea sobre la hipotenusa els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{OBC}$ han de ser iguals, és a dir si el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i isòsceles.

663.- Una circumferència de radi r s'ha dividit en dotze parts iguals i s'uneixen els punts de cada divisió amb el centre,
Per un d'aquests punts tracem una perpendicular al radi següent; pel peu de la perpendicular anterior tracem una perpendicular al radi següent i així successivament.
Calculeu la suma dels infinits segments (veure figura).
L. de Olabarrieta. Geometría y trigonometria. Pàgina 121. Problema 11.



Solució:
Siga la circumferència de radi r i centre O.
Siguen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L les dotze parts.
Els angles centrals que forma la divisió és:

$$\angle AOB = \frac{360^o}{12} = 30^o.$$



Siguen P, Q, R, S,.... les projeccions dels punts A, P, Q, R,... sobre els radis.

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{OA} = \frac{1}{2}r. \ \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

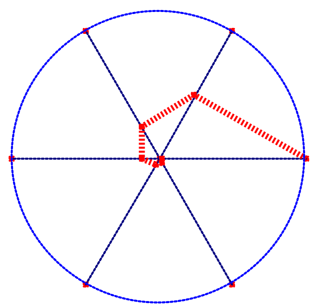
$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{OP} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}r. \ \overline{OQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

$$\overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{OQ} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}r. \ \overline{OR} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

Les longituds dels segments formen una progressió geomètrica de primer terme $a_1 = \frac{1}{2}r$ i raó $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
La suma infinita de la longituds dels segments és:

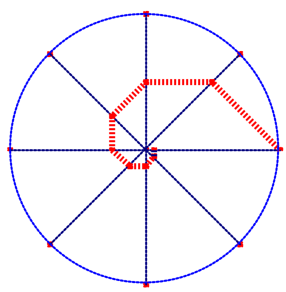
$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}r}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(2+\sqrt{3}\right)r.$$

Problema
La mateixa pregunta dividint la circumferència en 6 parts iguals.



Solució:
$S_\infty = r\sqrt{3}$.

Problema
La mateixa pregunta dividint la circumferència en 8 parts iguals.



Solució:
$S_\infty = \left(1+\sqrt{2}\right)r$.

664.- Si pels extrems de dues cordes perpendiculars d'una circumferència tracem tangents a la circumferència, s'obté un quadrilàter inscriptible.

Solució:

Siguen $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ dues cordes perpendiculars d'una circumferència.

Siguen t_A, t_B, t_C, t_D les rectes tangents a la circumferència en els punts A, B, C, D, respectivament.

Siga P la intersecció de t_A, t_D.

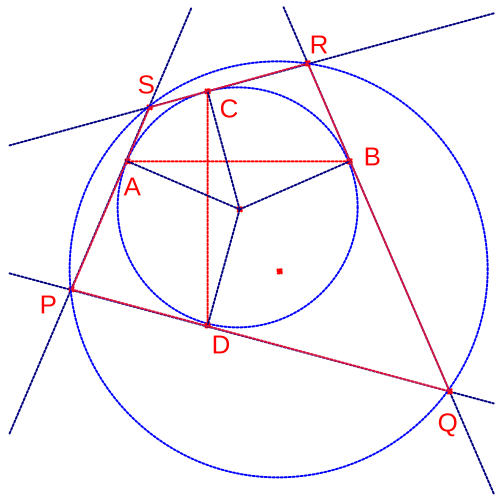
Siga Q la intersecció de t_B, t_D.

Siga R la intersecció de t_B, t_C.

Siga S la intersecció de t_A, t_C.

Vegem que el quadrilàter PQRS és inscriptible.

Per demostrar-ho veurem que els angles oposats són suplementaris.



Siga $a = \overset{\frown}{AC}$, $b = \overset{\frown}{CB}$, $c = \overset{\frown}{BD}$, $d = \overset{\frown}{DA}$.

Per ser les dues cordes perpendiculars:

$a + c = 180^{o}$.

$b + d = 180^{o}$.

Per ser $\angle SPQ$ un angle exterior:

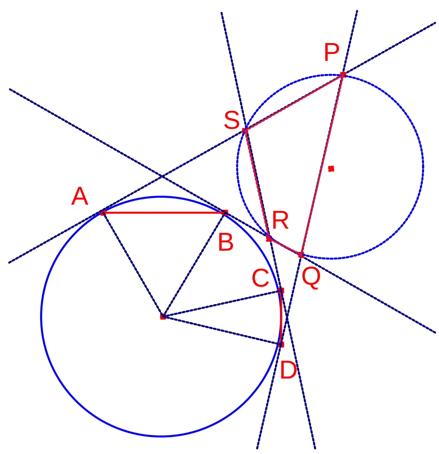
$$\angle SPQ = \frac{a+b+c-d}{2} = \frac{180^{o}+b-d}{2}.$$

Per ser $\angle QRS$ un angle exterior:

$$\angle QRS = \frac{a+c+d-b}{2} = \frac{180^{o}+d-b}{2}.$$

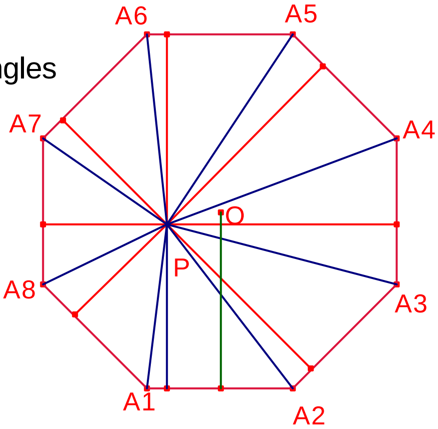
Per ser $\angle SPQ$ un angle exterior:

$$\angle SPQ + \angle QRS = \frac{180^{o}+b-d}{2} + \frac{180^{o}+d-b}{2} = 180^{o}.$$



665.- Calculeu la suma de les distàncies d'un punt interior a un octògon regular d'apotema a als costats.

Solució:
Siga P un punt interior de l'octògon regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ de centre O.
Siga c el costat de l'octògon regular.
Siga h_i la distància de P al costat $\overline{A_iA_{i+1}}$, $i=1,2,...,7$.
Siga h_8 la distància de P al costat $\overline{A_8A_1}$.



L'àrea de l'octògon regular és igual a la suma dels 8 triangles que forma P amb els costats:

$$S_8=\sum_{i=1}^{8}\frac{c\cdot h_i}{2}=\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{8}h_i .$$

L'àrea de l'octògon és:

$$S_8=8\frac{ca}{2}.$$

Igualant les dues expressions:

$\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{8}h_i=4ca$. Simplificant:

$$\sum_{i=1}^{8}h_i=8a.$$

Generalització:
Calculeu la suma de les distàncies d'un punt interior a un polígon regular de n costats i d'apotema a als costats.

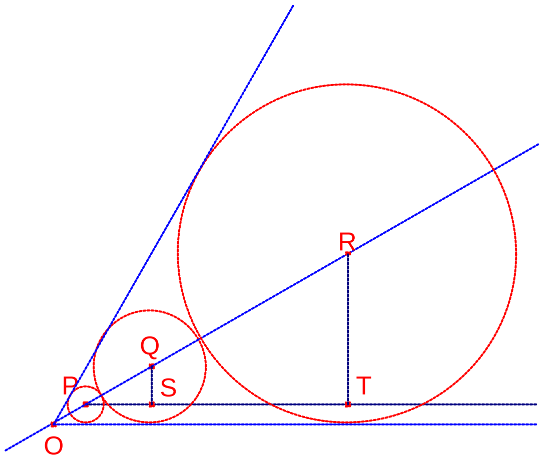
Solució:

$$\sum_{i=1}^{n}h_i=na.$$

Per a $n=3$ és el teorema de Viviani.

666.- Tres circumferències tangents dos a dos són tangents a un angle.
Si els radis de les dues exteriors són 35m i 315m, determineu el radi de la circumferència central.
L. de Olabarrieta. Geometría y trigonometría. Pàgina 72. Problema 12.

Solució:
Siga O el vèrtex de l'angle.
Siguen P, Q, R els centres de les circumferències de radis 35, x, 315, respectivament.
Siga la recta r que passa pel punt P i és paral·lela a un costat.
Siga S la projecció de Q sobre r.
Siga T la projecció de R sobre r.



$\overline{PQ} = 35 + x$, $\overline{PR} = 35 + 2x + 315$.
$\overline{QS} = x - 35$, $\overline{RT} = 315 - 35$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQS}$, $\overset{\Delta}{PRT}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

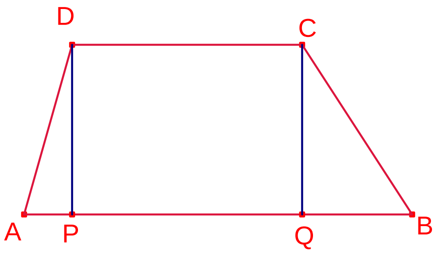
$$\frac{\overline{RT}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{PQ}}.$$

$\frac{x-35}{35+x} = \frac{280}{350+2x}$. Resolent l'equació:
$x = 105m$.

L'angle mesura:

$$2 \cdot \text{arctsin}\frac{\overline{RT}}{\overline{PR}} = 2 \cdot \arcsin\frac{70}{140} = 60^{o}.$$

667.- Siga el quadrilàter convex ABCD tal que $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ són paral·lels.
Proveu que $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$.
KöMaL, C1131.



Solució:
ABCD és un trapezi.
Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga Q la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga $h=\overline{PD}=\overline{QC}$ altura del trapezi
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQC}$:

$$\overline{AC}^2=\overline{AQ}^2+h^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPD}$:

$$\overline{BD}^2=\overline{BP}^2+h^2 \qquad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AQ}^2+\overline{BP}^2+2h^2 \qquad (3)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:

$$h^2=\overline{AD}^2-\overline{AP}^2 \qquad (4)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQC}$:

$$h^2=\overline{BC}^2-\overline{BQ}^2 \qquad (5)$$

Substituint les expressions (4) (5) en l'expressió (3):

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\left(\overline{AP}+\overline{CD}\right)^2+\left(\overline{BQ}+\overline{CD}\right)^2+\overline{AD}^2-\overline{AP}^2+\overline{BC}^2-\overline{BQ}^2 \qquad (6)$$

Simplificant:

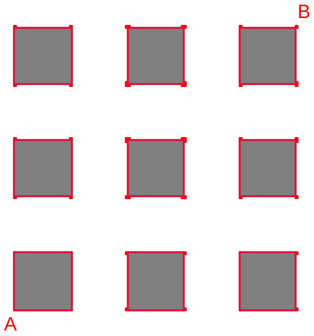
$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2\cdot\overline{CD}^2+2\cdot\overline{AP}\cdot\overline{CD}+2\cdot\overline{BQ}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2 \qquad (7)$$

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2\cdot\overline{CD}\left(\overline{CD}+\overline{AP}+\overline{BQ}\right)+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2 \qquad (8)$$

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AB}+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2 \qquad (9)$$

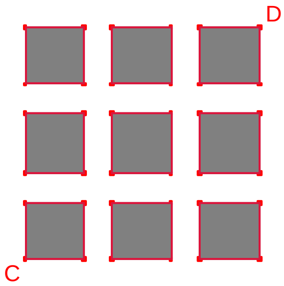
Aleshores, que $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$.

668.- Tenim dos plànols de dues ciutats.
a) Les façanes dels edificis (pintats de gris) mesuren igual que els carrers 20m.

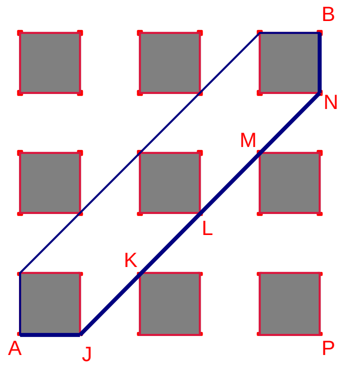


Calculeu la mínima distància per anar del punt A a B.
Quants trajectes distints hi ha?.

b) Les façanes dels edificis (pintats de gris) mesuren 20m i els carrers 10m.

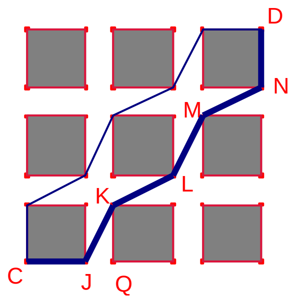


Calculeu la mínima distància per anar del punt C a D.
Quants trajectes distints hi ha?.



Solució:
a)
Notem que els punts J, K, L, M, N estan alineats.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JPN}$:
$\overline{JN} = 80\sqrt{2}$.
Aleshores, la distància mínima entre A i B és:
$\overline{AJ} + \overline{JN} + \overline{NB} = 40 + 80\sqrt{2} \approx 153'14\text{m}$.
b)
Un dels camins de recorregut mínim és CJKLMND
Notem que $\overline{JK} = \overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MN}$, $\overline{CJ} = \overline{ND}$.

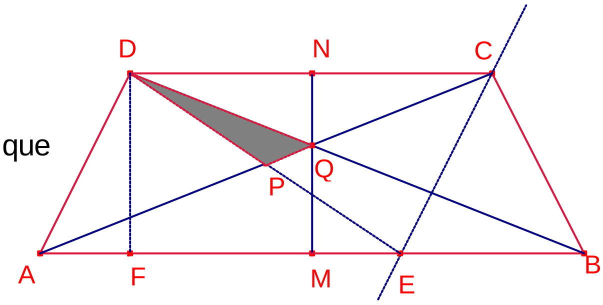


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JQK}$:
$\overline{JK} = 10\sqrt{5}$.
Aleshores, la distància mínima entre C i D és:
$4 \cdot \overline{AK} + 2 \cdot \overline{CJ} + \overline{NB} = 40\sqrt{5} + 40 \approx 129'44\text{m}$.
Hi ha un altre trajecte d’igual distància el simètric respecte de CD.

669.- Una base d'un trapezi isòsceles és tres vegades l'altura i l'altra base és dues vegades l'altura.
Per un vèrtex del costat menut es dibuixa una recta paral·lela al costat desigual que divideix el trapezi en un paral·lelogram i un triangle isòsceles.
Dibuixem les diagonals del trapezi i la diagonals del paral·lelogram.

Proveu que l'àrea del triangle format per les tres diagonals és $\frac{1}{25}$ l'àrea del trapezi.

KöMaL, C1134.



Solució:
Siga el trapezi isòsceles ABCD, $\overline{AB}$ paral·lel a $\overline{BC}$.
Siga la recta que passe per C paral·lela al costat $\overline{AD}$ que talla el costat en el punt E.
AECD és un paral·lelogram, aleshores:
$\overline{AE}=\overline{CD}$.
Siga $\overline{DF}=1$ altura del triangle, aleshores, $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$.
Siga Q la intersecció de les diagonals del trapezi.
Siga P la intersecció de $\overline{AC}$ i $\overline{DE}$.

Volem calcular la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{DPQ}$ i el trapezi ABCD.
Siga $\overline{MN}=1$ altura del trapezi que passa pel punt Q.
L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\overline{DF}=\frac{3+2}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABQ}$, $\overset{\Delta}{CDQ}$ són semblants i la raó de semblança és 3:2.
Aleshores, $\frac{\overline{NQ}}{1-\overline{NQ}}=\frac{2}{3}$. Resolent l'equació: $\overline{NQ}=\frac{2}{5}$.

$$S_{CDQ}=\frac{\overline{CD}\cdot\overline{NQ}}{2}=\frac{2\frac{2}{5}}{2}=\frac{2}{5}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DF}}{2}=\frac{3\cdot 1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Notem que P és la intersecció de les diagonals del paral·lelogram AECD, aleshores P divideix la diagonal $\overline{DE}$ en dues parts iguals.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AED}$:

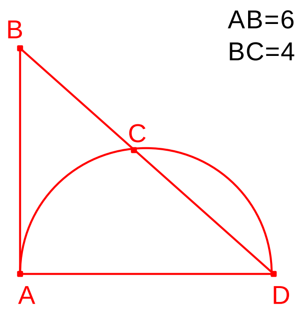
$$S_{APD}=\frac{1}{2}S_{AED}=\frac{1}{2}\frac{\overline{AE}\cdot\overline{DF}}{2}=\frac{1}{2}\frac{2\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$S_{DPQ}=S_{ABCD}-\left(S_{CDQ}+S_{ABC}+S_{APD}\right)=\frac{5}{2}-\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{10}.$$

La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{DPQ}$ i el trapezi ABCD és:

$$\frac{S_{DPQ}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{25}.$$

670.- Calculeu el radi de la semicircumferència si $\overline{AB} = 6\text{cm}$ i $\overline{BC} = 4\text{cm}$.
Exámenes de estado. Edelvives. Problema 385.



Solució:

$\angle BAD = 90^{\circ}$ ja que $\overline{AB}$ és tangent a la semicircumferència.

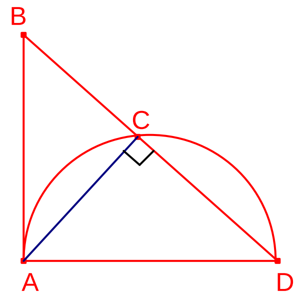
C pertany a la semicircumferència i $\overline{AD}$ és diàmetre aleshores, $\angle ACD = 90^{\circ}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $\angle ACB = 90^{\circ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$\overline{AC}^2 = 6^2 - 4^2 = 20$.

$\overline{AC} = \sqrt{20}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ són semblants ja que $\angle ABC = \angle ADC$.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$.

$\frac{4}{6} = \frac{\sqrt{20}}{\overline{AD}}$. Resolent l'equació:

$\overline{AD} = 3\sqrt{5}$.

El radi de la semicircumferència és la meitat del diàmetre:

$\frac{\overline{AD}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \approx 3'35\text{cm}$.