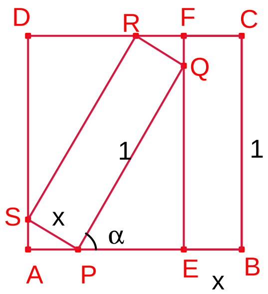
Problemes de Geometria per a l'ESO 68

671.- En la figura següent, el quadrat exterior té costat 1 i els dos rectangles grisos són iguals.
Quina és l'àrea d'aquests rectangles.

Solució:



Siga ABCD el quadrat exterior de costat 1.

Siga $\alpha = \angle EPQ$.

Siga $\overline{EB} = \overline{PS} = \overline{RQ} = x$.

$\overline{PE} = \cos\alpha$, $\overline{AP} = x \cdot \sin\alpha$.

$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PE} + \overline{EB}$.

$x \cdot \sin\alpha + \cos\alpha + x = 1$ (1)

$\overline{EQ} = \sin\alpha$, $\overline{QF} = x \cdot \cos\alpha$.

$\overline{AB} = \overline{EF} = \overline{EQ} + \overline{QF}$

$\sin\alpha + x \cdot \cos\alpha = 1$ (2)

Aïllant x de l'expressió (2):

$$x = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha + \cos\alpha + \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$, $\cos\alpha \neq 0$. Simplificant:

$$\frac{\sin\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = 1.$$

$\frac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = 1$. Simplificant:

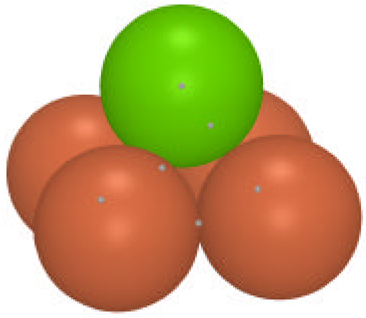
$2\cos\alpha = 1$.

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 60^o$.

$$x = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

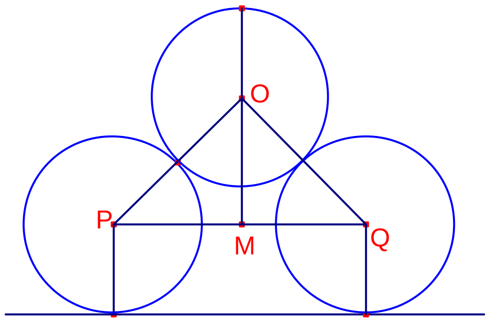
L'àrea d'un dels rectangle gris és:

$S_{PQRS} = x \cdot 1 = 2 - \sqrt{3}$.



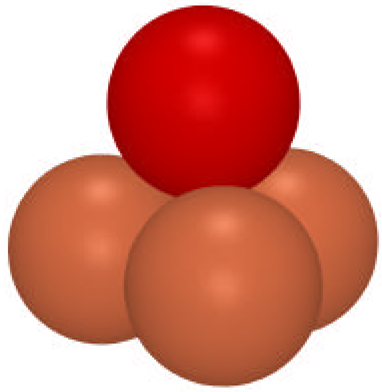
672.- Hem col·locat quatre esferes d'igual radi r en una superfície plana.
Damunt d'aquestes quatre esferes n'hem col·locat una altra esfera del mateix radi r tangent a les quatre.
Calculeu la distància del punt més alt al plànol.

Solució.
Els quatre centres de les esferes tangent al plànol formen un quadrat de costat 2r.
La distància entre els centres de dues esferes oposades tangent a la superfície plana és igual a la diagonal del quadrat de costat 2r:
$2\sqrt{2}r$.
El centre de l'esfera superior forma un triangle isòsceles de costats iguals 2r i costat desigual la distància entre dues esferes oposades de la tangents a la superfície plana.
Siguen P i Q els centres de dues esferes oposades tangent a la superfície.
Siga O el centre de la superior.
$\overline{PQ} = 2\sqrt{2}r$.
$\overline{OP} = 2r$.
Siga P el punt mig de $\overline{PQ}$.
$\overline{PM} = \sqrt{2}r$.



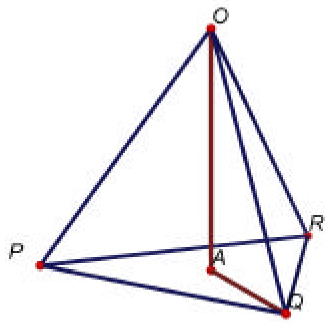
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMO}$:
$\overline{OM} = \sqrt{(2r)^2 - \left(\sqrt{2}r\right)^2} = \sqrt{2}r$.
La distància del punt més alt a la superfície plana és:
$2r + \overline{OM} = \left(2 + \sqrt{2}\right)r$.

673.- Hem col·locat tres esferes d'igual radi r en una superfície plana.
Damunt d'aquestes tres esferes n'hem col·locat una altra esfera del mateix radi r tangent a les tres.
Calculeu la distància del punt més alt al plànol.



Solució:
Els centres de les quatre esferes formen un tetraedre regular d'arestes 2r.
La distància del punt més alt al plànol tangent a les tres esferes és igual a 2r més l'altura del tetraedre regular d'aresta 2r.

Siguen P, Q, R els centres de les esferes tangents a la superfície plana.



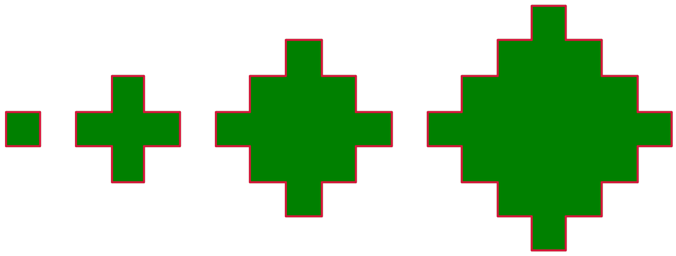
$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{PR} = 2r$.
Siga O el centre de l'esfera superior.
Siga A el centre de la cara PQR.
$\overline{QR} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,r$.
$\overline{OQ} = 2r$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAQ}$, l'altura del tetraedre regular és:

$$\overline{OA} = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}r\right)^2} = r\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2r}{3}\sqrt{6} .$$

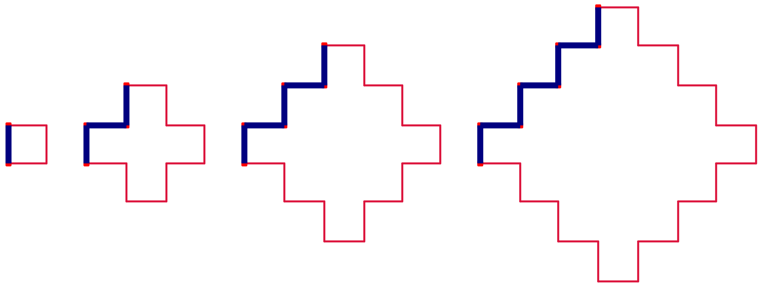
La distància del punt més alt a la superfície plana és:

$$2r + \overline{OA} = \left(2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)r .$$

674.- En la següent figura, successió de polígons "encreuats" de costat 1 determineu els perímetres i les àrees 6 primers termes. Determineu el perímetre i l'àrea del terme general.

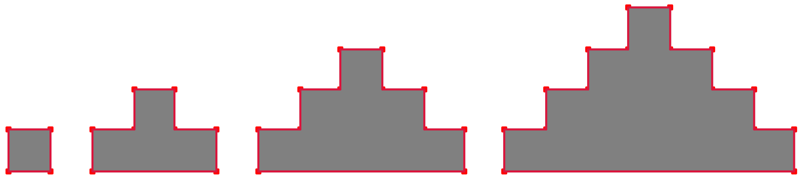


Solució:
Perímetres:



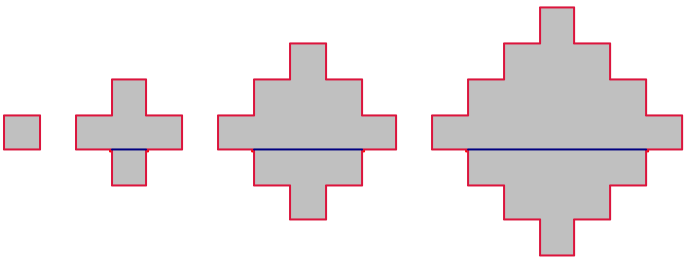
$4\cdot 1, 4\cdot 3, 4\cdot 5, 4\cdot 7,........$ El terme general, $p_n = 4\cdot(2n-1)$.
Els sis primers termes són: 4, 12, 20, 28, 36, 44.

Àrees d'aquesta successió:



$1, \quad 1+3, \quad 1+3+5, \quad 1+3+5+7,........$
$1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad 4^2,................$
Terme general, $a_n = n^2$.

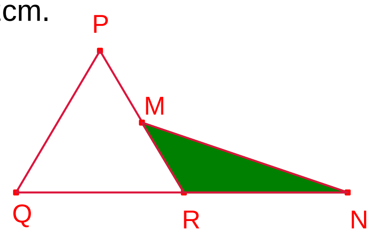
Àrees de la successió:



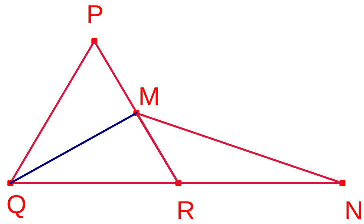
$1^2+0^2, \quad 2^2+1^2, \quad 3^2+2^2, \quad 4^2+3^2,........$
Terme general, $s_n = n^2+(n-1)^2$.
Els sis primers termes són: 1, 5, 13, 25, 41, 61.

675.- El costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ de la figura mesura 2cm.
Si M és el punt mig de $\overline{PR}$ i R el punt mig de $\overline{QN}$.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MRN}$.



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen la mateixa àrea.



Els triangles $\overset{\Delta}{QRM}$, $\overset{\Delta}{MRN}$ tenen la mateixa base $\overline{QR} = \overline{RN}$ i la mateixa altura sobre aquests costats.
Aleshores tenen la mateixa àrea.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QRM}$ és la meitat de l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ ja que M és el punt mig del costat $\overline{PR}$.

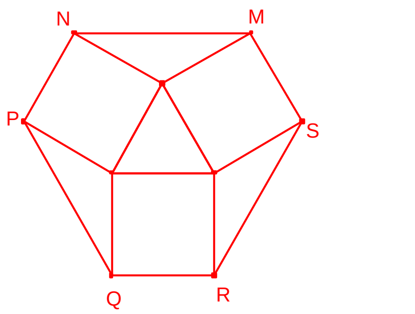
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ és:

$$S_{PQR} = \frac{\overline{PQ}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Calculem l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MRN}$:

$$S_{MRN} = S_{QRM} = \frac{1}{2}S_{PQR} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0'87\text{cm}^2.$$

676.- La figura següent està formada a partir d'un triangle equilàter interior, el costat del qual mesura 1cm, i quadrats adossats als costats.
Determineu l'àrea de l'hexàgon MNPQRS.



Solució:

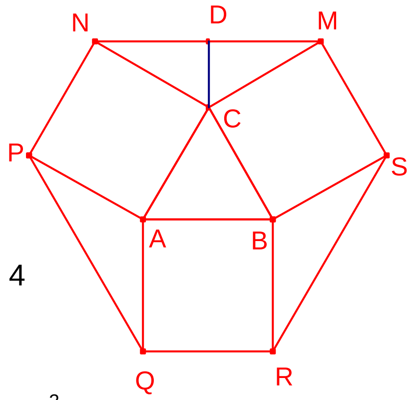
Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter interior.

Notem que $\angle NCM = 120^{\circ}$.

Siga D el punt mig del segment $\overline{MN}$.

$\angle NCD = 60^{\circ}$. Aleshores:

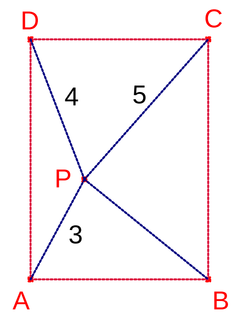
$S_{CDN} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.



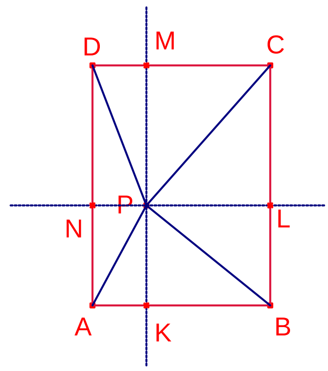
L'àrea de l'hexàgon MNPQRS és igual a la suma de les àrees de 4 triangles equilàters de costat 1 més la suma de les àrees de 3 quadrats de costats 1:

$$S_{MNPQRS} = 4 \cdot S_{ABC} + 3 \cdot S_{ABRQ} = 4\left(\frac{1^2\sqrt{3}}{4}\right) + 3 \cdot 1^2 = 3 + \sqrt{3} \approx 4'7321 cm^2.$$

677.- P és un punt interior del rectangle ABCD tal que $\overline{PA} = 3\text{cm}$, $\overline{PC} = 5\text{cm}$, $\overline{PD} = 4\text{cm}$.
Determineu la mesura del segment $\overline{PB}$.



Solució:
Siguen K, L, M, N les projeccions de P sobre els costats.
Siga $\overline{AK} = \overline{DM} = a$, $\overline{KB} = \overline{MC} = b$, $\overline{BL} = \overline{AN} = c$, $\overline{LC} = \overline{ND} = d$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKP}$:
$\overline{PB}^2 = b^2 + c^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMP}$:
$b^2 + d^2 = 5^2$ (1)
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DNP}$:
$a^2 + d^2 = 4^2$ (2)
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKP}$:
$a^2 + c^2 = 3^2$ (3)
Si sumen les expressions (1) (3) i li restem l'expressió (2):
$b^2 + c^2 = 5^2 + 3^2 - 4^2$.
$b^2 + c^2 = 18$.
$\overline{PB}^2 = b^2 + c^2 = 18$.
$\overline{PB} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

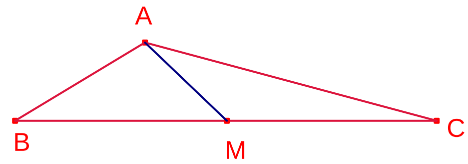
678.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = 4$ i $\overline{AC} = 8$.
Siga M és el punt mig de $\overline{BC}$ i $\overline{AM} = 3$.
Calculeu la longitud de $\overline{BC}$.

Solució 1:
$\overline{BM} = \overline{CM} = x$.

Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{AMC}$ són iguals ja que tenen la mateixa base i la mateixa altura.
Aplicant la fórmula d'Heró per calcular l'àrea:

$$\frac{\sqrt{(7+x)(-1+x)(1+x)(7-x)}}{4} = \frac{\sqrt{(11+x)(5+x)(-5+x)(11-x)}}{4}.$$

$(49 - x^2)(x^2 - 1) = (121 - x^2)(x^2 - 25)$. Simplificant:



$96x^2 = 2976$. Resolent l'equació:
$x = \sqrt{31}$.
$a = \overline{BC} = 2x = 2\sqrt{31}$.

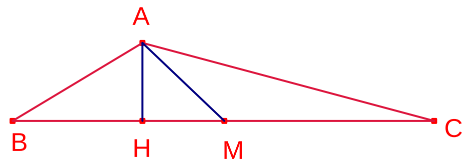
Solució 2:

La mitjana d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sobre el vèrtexs A és: $m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.

$$3 = \frac{\sqrt{2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 4^2 - a^2}}{2}.$$

Resolent l'equació: $a = \overline{BC} = 2\sqrt{31}$.

Solució 3:



Siga $\overline{AH} = h$, altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $\overline{BH} = m$, $\overline{CH} = n$.
$a = \overline{BC} = m + n$.

$$\overline{HM} = \overline{BM} - \overline{BH} = \frac{m+n}{2} - m = \frac{n-m}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABH}$: $h^2 + m^2 = 4^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACH}$: $h^2 + n^2 = 8^2$.
Sumant ambdues expressions:
$2h^2 = 80 - m^2 - n^2$.

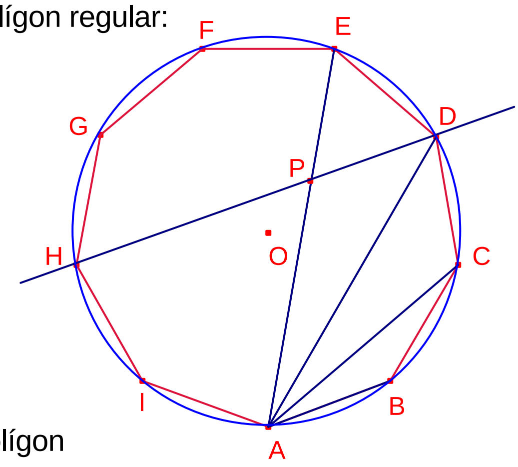
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMH}$:

$$h^2 + \left(\frac{n-m}{2}\right)^2 = 3^2.$$

$(n-m)^2 + 4h^2 = 36$.
$(n-m)^2 + 2(80 - m^2 - n^2) = 36$.
$-m^2 - n^2 - 2mn = -124$.
$(m+n)^2 = 124$.
$a = m + n = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}$.

679.- Siga un polígon regular de nou costats ABCDEFGHI.
Proveu que $\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AB}$.
Crux Mathematicorum M514.

Solució 1
Considerem la recta DH que talla la diagonal $\overline{AE}$ en el punt P.
El punt P és interior a la circumferència circumscrita al polígon regular.
$\angle EPD$ és interior a la circumferència circumscrita al polígon regular:



$$\angle EPD = \frac{\overset{\frown}{AH} + \overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{80^o + 40^o}{2} = 60^o.$$

$\angle AED$ és inscrit en la circumferència circumscrita al polígon regular:

$$\angle EPD = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o.$$

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{PDE}$ és equilàter.
$\overline{PE} = \overline{DE} = \overline{PD} = \overline{AB}$..
$\angle HDA$ és inscrit en la circumferència circumscrita al polígon regular:

$$\angle HDA = \frac{\overset{\frown}{AH}}{2} = \frac{80^o}{2} = 40^o.$$

$\angle ADC$ és inscrit en la circumferència circumscrita al polígon regular:

$$\angle ADC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{80^o}{2} = 40^o.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{DPA}$, $\overset{\Delta}{DCA}$ són iguals, aleshores:
$\overline{AP} = \overline{AC}$.

$$\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PE} - \overline{AC} = \overline{AB}.$$

Solució 2:
$\angle CAB$ és inscrit en la circumferència circumscrita al polígon regular:

$$\angle CAB = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{40^o}{2} = 20^o.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 140^o} = \frac{\overline{AB}}{\sin 20^o}.$$

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \cos 20^o \qquad (1)$$

$\angle CAE$ és inscrit en la circumferència circumscrita al polígon regular:

$$\angle CAE = \frac{\overset{\frown}{CE}}{2} = \frac{80^o}{2} = 40^o.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACE}$:

$$\frac{\overline{AE}}{\sin 100^o} = \frac{\overline{AC}}{\sin 40^o} = \frac{\overline{AE} - \overline{AC}}{\sin 100^o - \sin 40^o}.$$

$$\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AC}\frac{\sin 100^o - \sin 40^o}{\sin 40^o} \qquad (2)$$

$$\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AC}\frac{2\cdot\cos 70^o \cdot \sin 30^o}{\sin 40^o} \qquad (3)$$

$$\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AC}\frac{\cos 70^o}{\sin 40^o} \qquad (4)$$

$$\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AC}\frac{\sin 20^o}{\sin 40^o} \qquad (5)$$

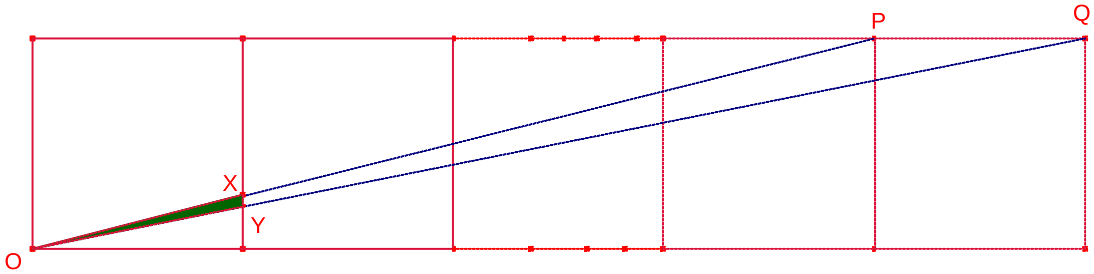
$$\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AC}\frac{1}{2\cdot\cos 20^o} \qquad (6)$$

Substituint l’expressió (1) en l’expressió (6):

$$\overline{AE} - \overline{AC} = 2\cdot\overline{AB}\cdot\cos 20^o \cdot \frac{1}{2\cdot\cos 20^o} = \overline{AB}.$$

$$\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AB}.$$

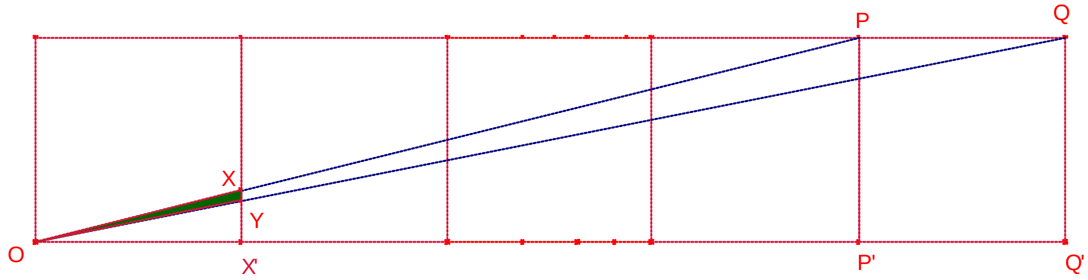
680.- Un nombre de quadrats de costat 1 són dibuixats sobre una recta com es veu en la figura



Siga O el vèrtex inferior de l'esquerra del primer quadrat.
Siga P i Q els vèrtexs superiors de la dreta dels quadrats 2011 i 2012, respectivament.
Els punts P i Q són tals que les rectes OP, OQ tallent el primer quadrat en els punts X i Y, respectivament.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OXY}$.
Crux Mathematicorum M518.

Solució:



Siguen X', P', Q', les projeccions de X, P, i Q sobre la línia inferior dels quadrats.
Siga $x = \overline{X'X}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OX'X}$, $\overset{\Delta}{OP'P}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{1}{2011} = \frac{x}{1}$, aleshores, $x = \frac{1}{2011}$.

Siga $y = \overline{X'Y}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OX'Y}$, $\overset{\Delta}{OQ'Q}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{1}{2012} = \frac{y}{1}$, aleshores, $y = \frac{1}{2012}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OXY}$ és igual a la diferència d'àrees dels triangles $\overset{\Delta}{OX'X}$, $\overset{\Delta}{OX'Y}$:

$$S_{OXY} = S_{OX'X} - S_{OX'Y} = \frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{1}{2011}\right) - \frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{1}{2012}\right) = \frac{1}{8092264} \approx 1'2357\cdot 10^{-7}.$$